绪　论

画法几何学是几何学的一个分支，它借助平面上的图象(图)来研究客观世界中物体的空间形状以及相应的几何规律。

因此，画法几何学的内容可归纳为下面两个基本问题：1)研究在平面上作空间形体的图象(图)的方法；2)研究利用图象(图)来解决和探讨空间问题的方法。

图象的需要，在原始社会里就已经表现出来。这可以从保存到现在的石块、岩石和原始人的物品与工具上所刻画的许许多多的图象得到证明。人类生产活动进一步的发展，向人们提出了如何在平面上更准确地表示空间物体的问题。建筑要塞工事及其它建筑物都要求预先画出它们的图象或图。机器生产以及人们各方面的生产活动也一样需要图。从某个年代起，制造任何物体都要先画出它的图，这种图不仅能够确定物体各部分的形状和大小，而且还能够获得物体的立体概念。向图象(图)提出的种种更高的要求，引起了研究"图象理论"的必要性。这种理论就构成了画法几何学的基础。

在画法几何学中，图是直接用来研究物体的几何形状和解决空间问题的工具。图在画法几何学中的这种重大意义，引起了一系列的对图的要求。

在这些要求中最重要的是：

1. 图应当是直观的，即它应能形成所画物体的空间概念。
2. 图应当是可逆的，即根据它应能准确地恢复所画物体的形状和大小。
3. 从作图观点来看，图应当足够简单。
4. 图上每个作图步骤的解答应当足够准确。

现在更详细地来分析图的"可逆性"这个要求。对各种工程图来说，这个要求是特别重要的。图是据以制造各种产品的生产文件。因此，必须做到根据图就能准确地确定未来产品的形状、大小以及有关它的某些其它资料。此外，图要给出产品的立体概念，而使产品便于制造。无论对物体作怎样的文字描述，都不可能代替图。画法几何学的创始人之一，法国学者和工程师加斯巴·蒙日(1746—1818)曾经这样说过：图是"工程的语言"。

不难理解，画在纸上的物体图象，并不是全部能准确地确定物体的几何形状的。要达到这要求，作物体的图象(图)必须根据一定的几何规则，使能够从失真的平面图形，想象出所画物体原来的空间形状。

空间物体这种按照几何规律画在平面上的图象是用投射法[①]作出的。这种投射法是画法几何学的基本方法。

---

① 来源于拉丁字 projecere——向前投掷。

根据投射法作出的图称为投影图。

应该注意，从直观的空间物体过渡到物体在平面上的图象（投影图），再进一步到懂得利用这种图来代替物体本身，开始时常常给学生带来很大困难。这些困难是由于有些学生的空间概念和空间想象力还没有充分发展而产生的。

画法几何学是一门帮助加强空间概念的学科。空间概念不仅为工程技术所必需，而且在人们的实践生活中也广泛需要。

开始学习画法几何时，最好从几何形体的造型入手。但在以后的教学中就要使学生习惯于不用模型也能在空间形体的投影图上进行作业。但这不是说，对学生难以想象的个别复杂题目也不能采用造型。

§1. 将空间形体投射到平面上的方法

1. **中心投影（透视）**[①] 设空间有一平面 Π'，称它为投影面或"画面"（图 1）。

取不属于投影面的某一点 S。这个点称为投射中心或"视点"。

为了将空间点 A 投射到平面 Π' 上，过已知点 A 和投射中心 S 引一直线。这样的直线称为投射线。然后求出投射线 SA 与投影面 Π' 的交点。所得交点 A' 称为已知点 A 在平面 Π' 上的中心投影。

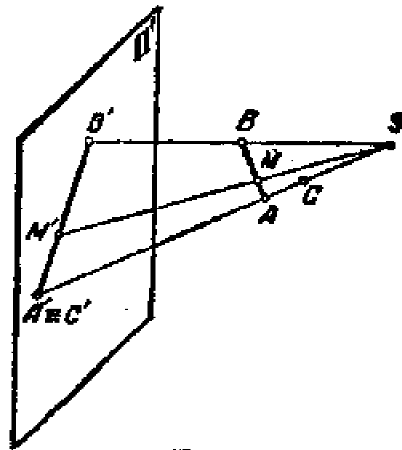


图 1

应该注意，当点 A 与投射中心重合时，用上述方法不能作出点 A 的投影。事实上，在这种情况下，不仅投射线是不确定的，而且点在平面 Π' 上的投影也是不确定的。

因此，投射中心 S 是唯一没有投影的点[②]。

当空间点到投影面的投射过程规定之后，就可以定义空间形体（空间形体也称为"原形体"、"原形"或"物体"）投影的概念。

每一个空间形体都可以看作是点的总和（集合）。空间形体上所有各点的投影的集合称为该空间形体的投影。

由这个定义可知，直线的投影就是直线上所有各点的投影的轨迹。

现在来证明这个轨迹是位在投影面 Π' 上的一条直线。

假定要将已知直线 AB 进行中心投射（参看图 1）。投射线 SA 和 SB 在平面 Π' 上分别确定点 A 和 B 的投影 A' 和 B'。对于直线 AB 上其它一点 M，投射线 SM 确定一个投影 M'。不难看出，所有的投射线位在同一（投射）平面 SAB 上。因此，已知直线上所有各点的投影位在投射面 SAB 与投影面 Π' 的交线上。由此得出结论：在一般情况下，直线的投影是直线。

---

① 来源于拉丁字 perspicere —— 透过去看。

② 关于空间点的投射的其它某些情况，例如当投射线平行于投影面时，可参看第一章 §1。

在特殊情况下，当已知直线通过投射中心S时，即直线本身就是投射线时，它在投影面Π'上投射为一点。事实上，直线SA上所有的点在平面Π'上都投射为同一点A'（图1）。例如，直线SA上的点C的投影C'与A'重合。这种情况我们写成下面的形式：$C' \equiv A'$。

从上述可知，要作直线的投影，只要作出直线上两个点的投影就够了。这说明，作形体的投影，不一定要将形体上所有的点都投射。譬如，要确定三角板（三角形薄板）的投影，只要作出它的三个顶点的投影。要确定任意多面体的投影，只要作出它所有顶点的投影，等等。

用中心投射法作出的物体的图象，其特点是直观性很好，这可以用人的视觉器官的构造来解释。可以近似地认为，人的视觉器官是根据中心投射的原理工作的。譬如，眼睛的晶状体的光学中心可以看作是投射中心（因此投射中心也称为“视点”），眼睛的网膜部分（在眼睛后壁视神经附近）看作是投影面，这部分网膜可以近似地当作平面（图2）。被观察的物体位在眼睛的外面。因此，从物体上各点发出并通过眼睛的光学中心S的视线（投射线），在眼睛的网膜上给出了相应的图象。

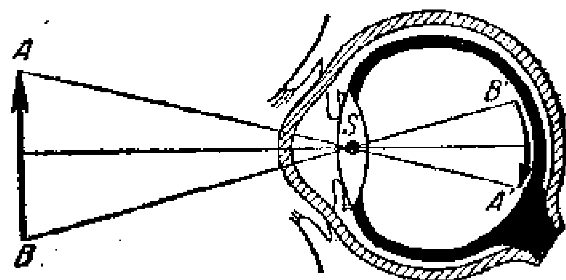


图 2

从上述可见，视觉过程与中心投射过程在几何上是一致的。由于这个缘故，用中心投射法绘制的投影图是很直观的。因此，对于一些直观性不强的图，还常常附有物体的中心投影图（透视图）。

根据同样理由，照片的显著特点是直观性很强。此时，底片起着投影面的作用，而物镜的光学中心起着投射中心的作用。

因此，直观性是中心投影图或透视图的重要性质。

但是，前面已经提到，投影图的其它性质，特别是作图简单以及能够恢复所画物体的形状和大小（即图的可逆性），在实用上具有重大的意义。在这方面透视图不是最方便的。因此，作空间形体的图象时，除了用中心投射法之外，同时广泛应用了平行投射法。

2. **平行投影**　照上述情况那样，给定一个平面Π'作为投影面或“画面”。此外，还给出不平行于投影面Π'的投射方向s（图3）。投射过程是用下述方法完成的。为了投射空间某一点A，过该点引投射线AA'与投射方向s平行。投射线与平面Π'的交点A'就是点A在平面Π'上的平行投影。

如果遵照讨论中心投影时所给出的形体投影的定义，我们可得一个结论：直线的平行投影是直线[①]。譬如，图3表示出线段AB的平行投射过程。这线段上所有的点的投射线位在同一（投射）平面上。所以线段AB的投影是线段$A'B'$。

现在讲述平行投影的某些性质。

---

① 当然，也象中心投影时一样，投射线是例外的。投射线的投影缩为一点。

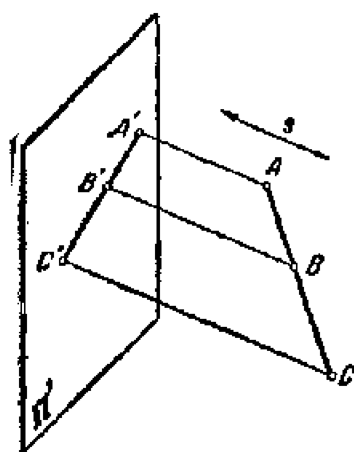


图 3

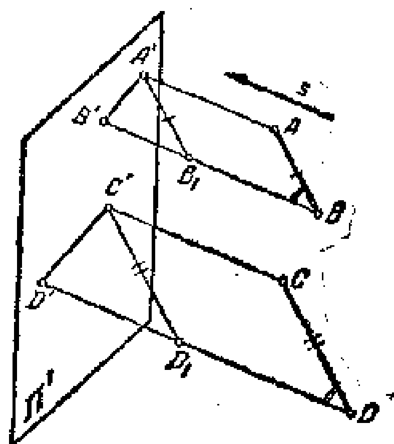


图 4

正如我们已经见到的，直线的平行投影是直线。因此，中心投影的这个性质在平行投射时也保持不变。

同时，平行投影还具有一些中心投影所没有的其它性质，列举如下：

1）空间互相平行的直线（在一般情况下）在投影面Π′上投射为平行的直线。

实际上，设在空间有互相平行的直线 AB 和 CD（图 4）。作出它们的投射面 $AA'B'B$ 和 $CC'D'D$，可以看出，这两个平面是平行的，因为它们上面各有一个角的对应边互相平行（$AB \parallel CD$，$BB' \parallel DD'$）。所以这些投射面与投影面Π′交于两条互相平行的直线。

2）位在平行直线（或位在同一直线）上的两线段的比例在其平行投影中保持不变。

设 AB 和 CD 是位在平行直线上的两线段。依投射方向 s 作出它们在平面Π′上的投影（参看图 4）。在投射面上引线段 $A'B_1$ 和 $C'D_1$ 分别平行且等于线段 AB 和 CD，则三角形 $A'B'B_1$ 与 $C'D'D_1$ 显然是相似的，因为它们的对应边是平行的。由此得出结论：

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B_1}{C'D_1}=\frac{A'B'}{C'D'}。$$

在特殊情况下，已知线段 AB 和 CD 可以位在同一直线上，但这并不改变所得的结论。

如果这时两线段的端点重合，即我们有线段 AB 和 BC（图5），则上述比例关系成为下面的形式：

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}。$$

因此，点 B 分线段 AC 所成的比例等于在投影中点 B' 分线段 $A'C'$ 所成的比例。特别是，原线段的中点投射为投影线段的中点。

三角形的重心（即中线的交点）投射为投影三角形的重心。

作为中心对称曲线的圆周（它所有的直径被圆心等分）投射为中心对称曲线（椭圆），这曲线的所有直径也被中心等分[1]。

3）在所有互相平行的线段中，线段的投影 $A'B'$ 对原线段的比值是一个常数。实际上，前面

[1] 参看第一章 §4。

得到的比例式:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

经移项后可写成:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}=u(\text{常数})。$$

定比 u 称为已知方向的线段的变形系数。

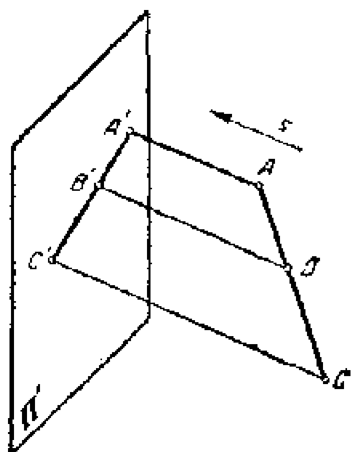


图 5

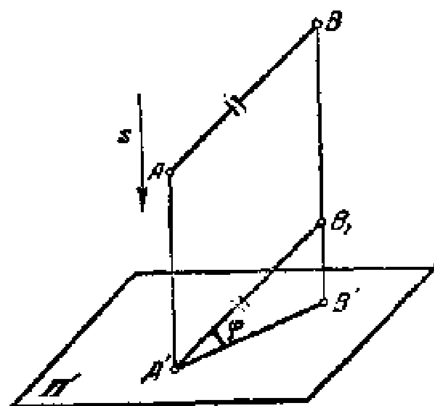


图 6

3. **正投影** 如果投射方向 s 垂直于投影面 Π' ($s\perp\Pi'$),则这种平行投影称为正投影(直角投影)。

在正投影中建立原线段长度与其投影长度之间的关系是很容易的。

假设线段 AB 与投影面 Π' 的夹角是 φ(图 6)。引 $A'B_1$ 平行于 AB。这时就有:

$$A'B'=A'B_1\cdot\cos\varphi=AB\cdot\cos\varphi。$$

在所得的式子中,线段正投影的长度用原线段的长度来表达。

其次可以证明,平面图形 Φ'(平面图形 Φ 的已知投影)的面积可用平面图形 Φ 的面积表达如下:

$$\Phi'=\Phi\cdot\cos\varphi,$$

式中 φ 表示原图形 Φ 所在的平面与投影面 Π' 的夹角。

该公式的证明见立体几何学教科书①。

从上述的中心投影、平行投影和正投影的性质可以看出:中心投影具有很好的直观性,但在相当大的程度上使形体原来的形状和大小失真。平行投影保持原形体的某些特性(直线的平行性、线段的比),但没有中心投影那样直观,这种情况在画很长的物体如建筑物、桥梁等时更为明显。

但是当所画的物体不很大(例如机器制造中的部件和零件),平行投影是很方便的。特别是

① 米.阿达玛著,初等几何,第二篇立体几何,1952 年版,第 45 页。

工程图中正投影的应用非常广泛，因为它可以非常容易地看出所画物体的大小。

至于中心投影或透视，则主要应用于建筑图。

§2. 逆问题和投影图的补充方法

1. 投射法可以使我们根据给出的物体作出其图象或投影，也就是解决了画法几何中的正问题。但与此同时又发生了一个逆问题，即如何根据物体的投影图来确定原物体。

前面已经指出，这个问题在工程实践中具有重大的意义。事实上，在生产中是根据产品的投影图来制造产品的。这种图应当完全确定该产品的形状和大小。因此很显然，无论在理论上或实践上，逆问题都有着重大的意义。

如果有了物体的中心投影图或平行投影图，很明显，只根据这样的一个图是不能确定原物体的。例如只根据图6上线段 AB 的投影 $A'B'$ 不可能判断被投射线段的长短。这线段的长度可能因点 A 和 B 在投射线上的不同而改变。因此，我们所研究的那个投影图不可能确定原物体，即没有"可逆性"。

因此就产生一个问题：应该怎样补充投影图才能使它成为"可逆图"，即完全可以确定被投射物体的图。

在画法几何中，研究可逆图的作法对我们特别重要。

我们来研究其中的一种"标高(标数)投影"法。

这个方法的原理是：如果除了点的投影外还给出点的高度，即该点到投影面的距离，则空间点对投影面的位置完全确定。

例如，给出了原形点 A 的正投影 A'，并且知道该点的高度 $h_A = A'A$(参看图6)。那么，如果在点 A' 处作直线 $A'A$ 垂直于平面 Π'，使其长度等于点 A 的高度 h_A，就找到原形点 A 的空间位置。

为此，在正投影图上，将每个点都补上数标，以表示对应的原形点的高度，这个高度是用图上所示的比例尺来度量的，这种图称为标高投影图或标数投影图(图7，a 和 $б$)。

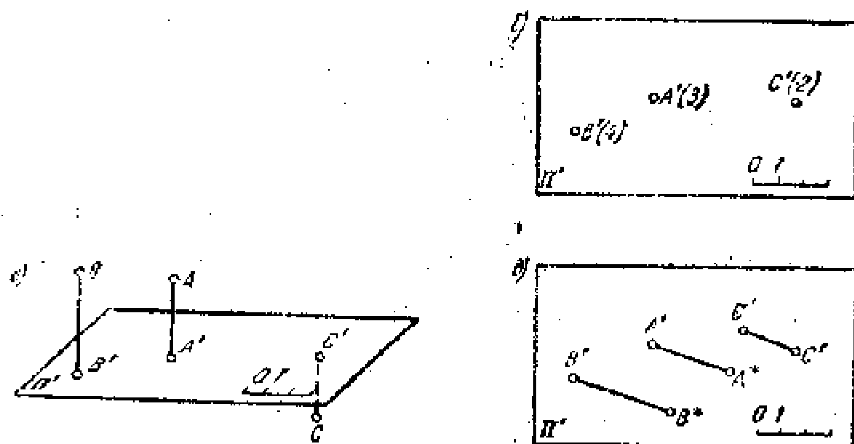


图 7

由图 7，$б$ 可见，标高投影图没有直观性，因为这种图只表示了点的投影而没有表示出它的空间位置。但这种图的可逆性是很清楚的，因为有了带数标的图就可以恢复所有被画的点在空间的准确位置，因而就可以确定原物体的形状和大小。

2. E.C. 费多罗夫院士(1853—1919)提出利用投影面上的平行线段来表示点的高度。这些平行线段的始点放在各对应点的投影上①。

所有这些线段的方向可以任意选择，但线段应互相平行。

应该指出，高于水平投影面的点，其高度线段及数标当作是正的；低于水平投影面的点，其高度线段及数标当作是负的。

在"费多罗夫投影"里，正的和负的高度线段以相反的方向来区别。例如图 7，$б$ 上高度线段 $A'A^*$ 和 $B'B^*$ 是正的，而高度线段 $C'C^*$ 是负的。

十分明显，"费多罗夫投影"图是可逆的，并且可以利用它来解决有关所画形体的空间问题。

费多罗夫法的特点是所有必须的条件(点的投影和高度)在图上都以图解方式给定。

例 试根据线段的"费多罗夫投影"图确定原线段的长度。

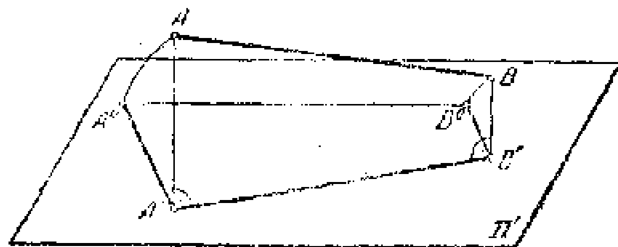


图 8

图 9 给出原线段 AB 的"费多罗夫投影"。此图可使我们画出位在投射面上的直角梯形 $A'ABB'$ 的实形(图 8)。为此，在图 9 上只要作出垂直于投影 $A'B'$ 的高度线段 $A'A°$ 和 $B'B°$ ($A'A°=A'A^*$, $B'B°=B'B^*$)，图形 $A'A°B°B'=A'ABB'$ 就是上述梯形的实形，因而线段 $A°B°$ 给出线段 AB 的实长。

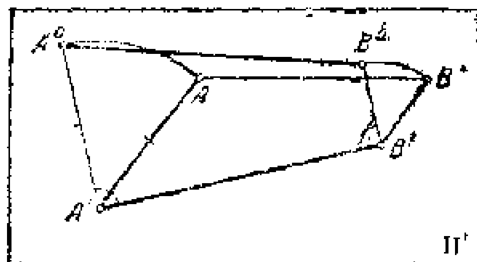


图 9

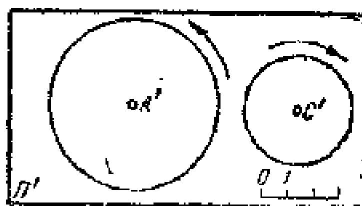


图 10

3. 也可以将空间点画成圆周。这种情况是先将点 A 正投射到投影面 Π' 上。然后在平面 Π' 上作一个圆心在点 A'(点 A 的投影)、半径等于点 A 的高度 $A'A$ 的圆周(参看图 7，a)。为了在图上区分已知点的高度方向是正的还是负的，应当把所画的圆周看作是"有向的"，即在圆周加上反时针方向(当高度为正时)和顺时针方向(当高度为负时)。譬如，在图 10 上画出了高度为(+3)的点 A 和高度为(−2)的点 C。空间点在平面上的这种表示法

① 高度线段的长度等于对应点的高度，每一条高度线段的末端可以看作是当投射方向与投影面成 45° 角时对应原形点的平行投影。

称为周期曲线图。

作具有可逆性投影图的上述各种方法(标高投影法,"费多罗夫投影"法、周期曲线图)主要用于地形测量和一般土方工程、道路工程及其它工程。近年来在应用"费多罗夫投影"方面取得了很大成果,特别是在煤矿工业里。

在本画法几何教程中,主要是研究另外两种可逆投影图的作法,即复合投影法和轴测投影法。这两种方法,尤其是复合投影法,广泛应用于工程技术图上,特别是机器制造方面。在本书后面各章中,将给它们以应有的地位。

第一章 几何变换

§1. 欧几里得空间及以“非固有”(“无穷远”)元素对它的补充

1. 组成初等几何学内容的空间基本规律和性质，远在纪元前希腊几何学家的著作中就叙述过了。欧几里得的著作(欧几里得：《几何原本》，纪元前三世纪) 具有特别重大的意义。在初等几何学中所研究的几何空间就以这位伟大的希腊几何学家的名字命名为欧几里得空间。

几何科学进一步的发展，必然给反映现实的几何空间的各种性质带来了新的概括。

2. 我们来研究，要在欧几里得的几何空间中进行投射，应该在这个几何空间的概念中补充些什么。

在本教程的“绪论”里，已经扼要地叙述过投射方法的实质。假定在平面上进行投射，而且点 S 是投射中心 (图 11)。我们将已知直线 p 上所有的点从中心 S 投射到直线 p' 上。例如，直线 p 上的点 A 投射到直线 p' 上为点 A'。这样，与直线 p 的每一个点对应的将是直线 p' 上的一个投影点。反之，每一个投影点 B' 将对应于直线 p 上的一个点 B。这样，在直线 p 和直线 p' 上的点之间就建立起所谓一一对应。但是，下面的两种情况会破坏这种对应。先来研究直线 p 上的点 C。这个点位在平行于直线 p' 的射线 SC 上。这条射线平行于直线 p'，它与 p' 没有交点。因此，对直线 p 上的点 C 来说，在直线 p' 上没有投影点。如果过投射中心 S 引平行于直线 p 的直线，则同样可以发现，对直线 p' 上的点 D' 来说，在直线 p 上没有对应的原形点。

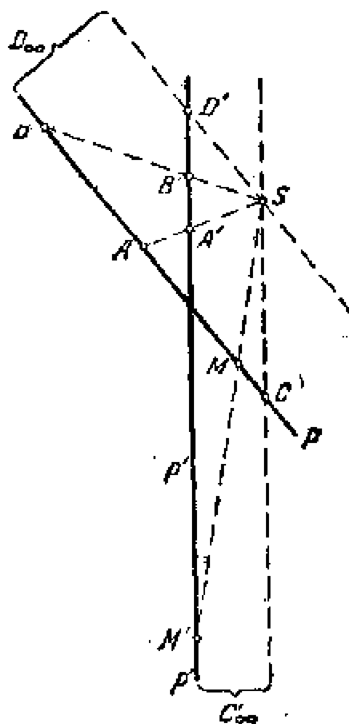


图 11

这样看来，用中心投射法在直线 p 和 p' 之间建立起来的点的对应是有重大缺陷的，不消除这种缺陷，中心投射就不可能全部实现。

3. 上述的缺陷是由欧几里得空间的基本性质所产生的，但可以用“非固有”元素或“无穷远”元素补充这个空间来把它消除。

从上面研究过的将一直线上的点投射到另一直线上的情况可以知道，应当如何用非固有元素来补充欧几里得空间。在投射过程完毕但不出现对应元素的情况下，想获得对应的元素，只要

把两条平行直线看作是相交的，再把它们的交点称为非固有点(以区别于欧几里得空间中的固有点)就可以了。这样，对于直线 p 上的每一个原形点，在直线 p' 上必有一个对应的投影点，只是这个投影点可能是非固有的而已。对直线 p' 上的点也可以用同样的讲法，即直线 p' 上的点是通过投射面与直线 P 上的原形点相联系，而在一种情况下(即投射线平行于直线 p' 时)，该原形点是非固有点。

两条平行直线有一个交点的这种讲法，应当推广到空间任意两条平行的直线。因此，空间的每一条直线都有一个唯一的、属于这条直线的非固有点。这样的点也称为"无穷远点"。这个名称的起因，研究一下图 11 就可以明白。在这个图中我们看到，当投影点 M' 越离越远的时候，投射线与直线 p' 所成的角就越来越小。当原形点 M 越趋近于点 C，投影 M' 离开投射中心就越远，因此，当点 M 与点 C 重合时，也就是当我们在直线 p' 上得到非固有点 C' 作为点 C 的投影时，这个非固有点当然可称为"无穷远点"。

应该注意，空间相互平行的所有直线，都通过同一个非固有点或无穷远点。

4. 在几何学中，通常把通过一已知点的空间直线的总和称为线把，该已知点则称为把的中心。在欧几里得空间中只存在带固有中心的线把。用非固有点补充欧几里得空间之后，我们还会有带非固有中心的线把。这样的线把由平行于空间任意一直线的所有直线构成。

5. 现在我们来阐明在任意平面上的非固有点的轨迹是什么。这个平面上的每一条直线都有一个唯一的非固有点，因此，每条直线都应与上述轨迹交于一个点。由此可知，把平面上非固有点的轨迹看作是一条直线是很合理的。这样，在每一个平面上将有一条非固有直线或无穷远直线。

其次，我们来研究两个平行的平面 ($\Omega \parallel \Phi$) (图 12)。如果在这两个平面上任意引两条互相平行的直线，则它们相交于一个非固有点。这个点同时属于这两个平行的平面。所以，我们可以说，在两平行平面中任一平面上的每一个非固有点，必然也属于另一个平行平面。换句话说，已知的平行平面具有公共的非固有直线。因此，在以非固有点补充过的欧几里得空间中，每两个平行的平面都相交于一条非固有直线或无穷远直线。平行于任一平面的所有平面的总和总有一条公共的非固有直线。这样，除了带"固有轴"的平面束(通过一条固有直线的平面的总和)之外，在我们的空间中还有带"非固有轴"的平面束(即平行于任一平面的平面的总和)。

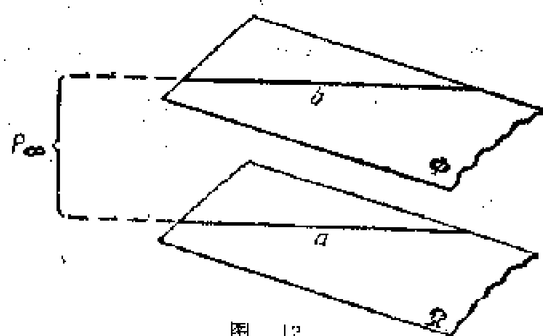


图 12

6. 剩下的是研究空间非固有点的轨迹是什么。

如果照上面所约定的那样，用非固有点来补充每一条直线，而用非固有直线来补充每一个平面，我们就得到空间非固有元素的整个集合。如果把这个集合看作是点的轨迹，我们就看到，这个轨迹与每一条直线都有一个公共点，而与每一个平面都有一条公共直线。因此，自然可以把空间非固有点的轨迹看作是一个非固有平面或无穷远平面。

这样就完成了用非固有元素或无穷远元素来补充欧几里得空间。现在，我们已建立了一个

可以毫无例外地进行投射的几何空间。

7. 应该指出，我们所引入的空间非固有元素是通过一般的从属关系与固有元素结合起来的，只是这个关系现在表达得更加完整罢了。

例如，在补充了非固有元素的空间中，下列命题是正确的。

1) 位在同一平面上的每两条直线总相交（交于固有点或非固有点）。

2) 空间两个任意平面总相交（交线是固有直线或非固有直线）。

3) 直线与平面总相交（交于固有点或非固有点）①。

应该注意，度量的概念，即与量度线段、角度、面积有关的概念，不能推广到非固有元素。

由上述可见，在以非固有元素补充过的空间里，平行投射法只是中心投射法的特殊情况。这时投射中心是非固有点。

这个空间的各种性质在射影几何教程中有更详细的研究②。

§2. 笛沙格定理·透视同素·透射

1. 假设把空间任一平面 Π 从中心 S 投射到投影面 Π′ 上（图 13）。不难看出，平面 Π 的每一个点 A 对应于投影面 Π′ 上的一点 A'。反之，平面 Π′ 上的每一个投影 B' 对应于平面 Π 上的原形点 B。这样的投射在平面 Π 的点和平面 Π′ 的点之间便建立起一一对应。我们把任一平面上的点的集合称为该平面的点场。因此，中心投射法在原平面 Π 和投影面 Π′ 的两个场之间建立起一一对应。

作为点的总和的任意一个场，它的每一个图形都对应于另一个场的某一个图形。正如在"绪论"中所指出的，直线在平面 Π′ 上的中心投影仍为直线。换句话说，在上面所建立的两平面场的一一对应中，一个场的直线

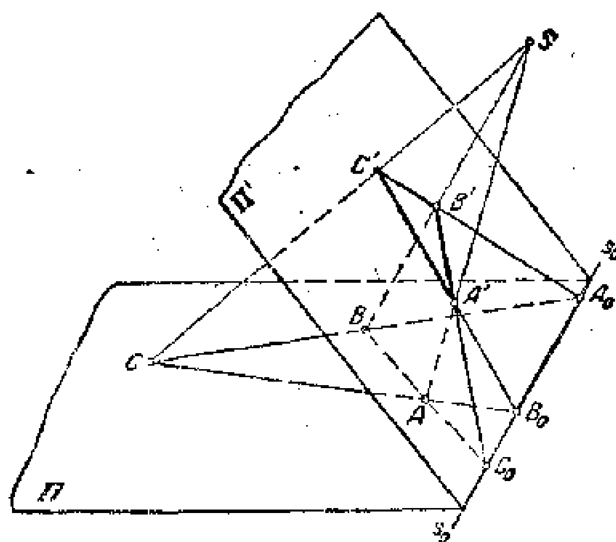


图 13

① 如果已知直线平行于平面，就有后一种情形。

② Н. А. 格拉哥列夫《射影几何学》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1936 年版。Н. Ф. 切特维鲁新《射影几何学》，莫斯科，国家教育出版社，1953 年版。

对应于另一个场的直线；位在第一个场的同一直线上的点，对应于位在第二个场的对应直线上的点。这样，我们利用投射法建立了两个平面场之间的一一对应，在这个对应中，位在场Π上沿直线排列的点变换为位在场Π'上沿直线排列的点。两个平面场的这种一一对应称为同素对应或同素。

2. 如果同素对应是用中心投射法得到的，则称为透视同素对应(参看图13)，这两个场就称为透视位置场。

在透视同素对应中，平面Π和Π'的交线 s_0 是透视同素对应的一条特殊直线。在直线 s_0 上的每一个点 A_0 都是二重点。实际上，将点 A_0 看作是场Π上的点时，我们就发现，它的投影和它本身重合。因此，直线 s_0 是透视同素对应的二重直线(直线的投影与直线本身重合)。直线 s_0 称为透视同素对应的轴。

假定三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是透视同素对应的对应图形。如果我们用 S 表示投射中心，各对对应的顶点 A 和 A'、B 和 B'、C 和 C' 便落在通过 S 的一些投射线上。同时，这两个三角形的对应边落在一些投射面上，因此它们彼此相交。例如，边 AB 和 $A'B'$ 落在投射面 SAB 上，而这个平面与同素轴 s_0 相交于点 C_0。由此可知，直线 AB 和 $A'B'$ 也通过点 C_0。对于两个三角形的其余两对对应边也可以作出同样的结论。因此，我们可以写出：

$$AB\times A'B'=C_0,\ BC\times B'C'=A_0,\ CA\times C'A'=B_0^{①}。$$

这样，我们便得到在射影几何中一个十分重要的、世称为笛沙格②定理的表达方式。

3. **空间笛沙格定理** 如果两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在空间处于这样的位置，使连接这两个三角形的对应顶点的直线相交于一点 S，则：1) 这两个三角形的三对对应边相交于三个点(A_0、B_0、C_0)；2) 这三个点位在一直线(轴 s_0)上。

应该注意，笛沙格逆定理也是正确的。

在特殊情况下，当两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在同一平面上时，平面笛沙格定理是正确的，这个定理与上述定理不同之处只是没有条款1，因为位在同一平面上的两个三角形的边总是相交的。

平面笛沙格定理 如果两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在同一平面上处于这样的位置，使连接这两个三角形的对应顶点的直线相交于一点 S，则这两个三角形的三对对应边的三个交点 ($A_0=BC\times B'C'$, $B_0=CA\times C'A'$, $C_0=AB\times A'B'$) 位在一条直线上(图14)。

证明平面笛沙格定理要应用空间作图，特别是要用到中心投射法③。

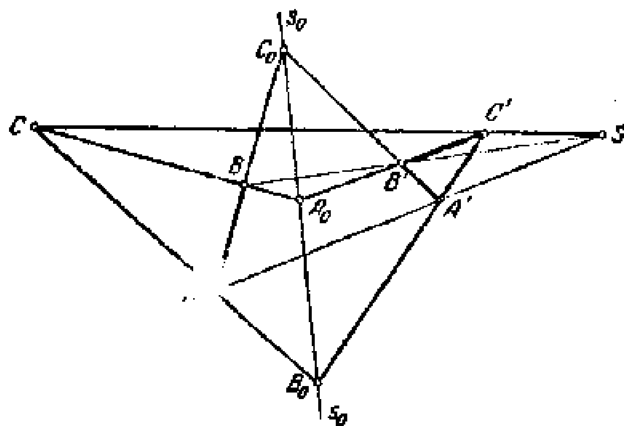


图 14

① 式中符号×表示相交。

② 笛沙格是法国的几何学家和工程师。

③ Н.А.格拉哥列夫《射影几何学》，第50页，莫斯科，国家技术理论书籍出版社。或 Н.Ф.切特维鲁新《射影几何学》，第93页，莫斯科，国家教育出版社。

平面的笛沙格逆定理也是正确的。利用笛沙格定理(正的和逆的)可以更深刻地研究透视同素对应的性质。

4. 假定平面Π′(图13)绕轴s_0转动一个角度(图15)。两个场的位置因而改变，但两个场的点之间的对应保持不变，即点A'、B'、C'仍然对应于点A、B、C。同时我们指出，平面Π′转动后，两个三角形的每对对应边仍然跟转动前一样相交于同素轴上的点A_0、B_0、C_0。如果我们把笛沙格逆定理应用于平面Π′转动以后的两个三角形ABC和$A'B'C'$上，就可以断定，连接两个三角形对应顶点的直线AA'、BB'、CC'应当相交于一点，这个点我们用字母S^*表示。这就证明了当平面Π′转动某一个角度后，同素对应场Π和Π′仍处于透视位置。这时，透视同素轴(直线s_0)不变，但同素中心现在则占有一个新的位置(点S^*)。还有，当我们使平面Π或Π′绕它们的交线转动时，可以使这两个平面重叠在一起。这样，三角形ABC和$A'B'C'$便落在同一平面上。它们的对应边仍然相交于直线s_0上的点A_0、B_0、C_0。我们应用对平面的笛沙格逆定理，就可以断定，连接这两个三角形对应顶点的直线AA'、BB'、CC'应当通过同一个点，这个点我们用字母$\bar{S}^*$表示(图15)。这样，当平面Π和Π′重叠时，在这两个平面上的点场的透视同素对应没有受到破坏。

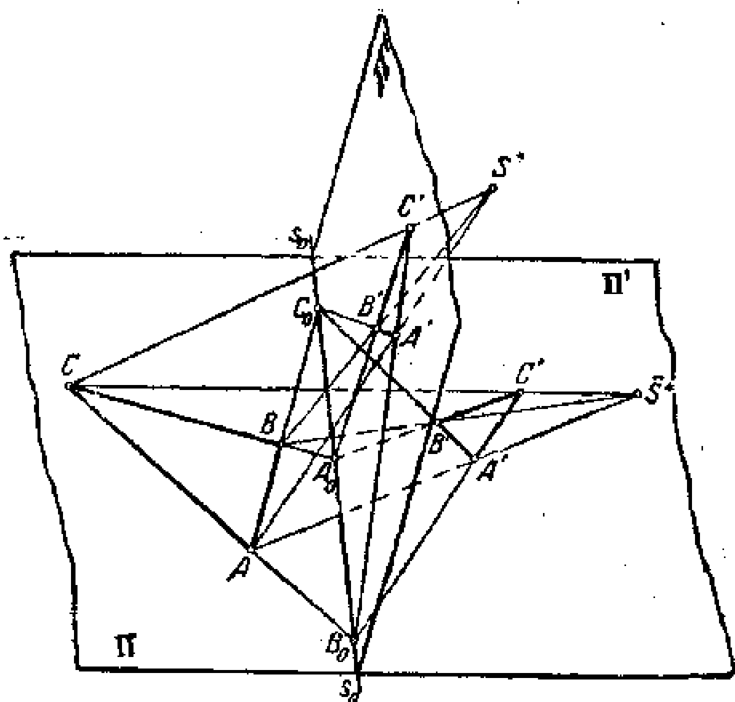


图 15

在射影几何学中，这种在同一平面上的两个点场的同素对应称为透射对应。

两个场各对对应直线的交点所在的二重直线称为透射轴。两个场各对对应点连线的交点称为透射中心。

两个点场的透射对应可以用一个中心，一条轴和一对对应点给出。例如，设在图14上给出透射对应的中心S、轴s_0和一对对应点A和A'。在这种情况下，对于场Π的任意一点B，都可以作出它在场Π′上的对应点B'。为此，我们引直线AB直到与轴s_0交于点C_0，那么，对应的直线$A'B'$也应当通过点C_0，因为点C_0是二重点。所求的点B'应当位在直线$A'C_0$上。点B'是投射线SB与直线$A'C_0$的交点。如果给出场Π′的点C'，同样也可以作出场Π的对应点C。

值得注意的是：透射中心S是特殊的二重点，也就是说，它不仅自身对应，而且具有如下性质，即所有通过它的直线都是二重直线。

同样，透射轴s_0是特殊的二重直线，并且它的所有的点都是二重点。应该注意，投射线虽然也是二重直线，但它只有两个二重点(与透射轴的交点和透射中心)。

§3. 平行投射·两平面场的透视仿射(亲似)对应及其特性

1. 图形依给定方向进行的平行投射，特别是正投射，今后对我们将有重大的意义。平行投射可以看作是中心投射在投射中心为无穷远(非固有)点时的特殊情况。

假定将平面Π上的点平行投射到平面Π′上(图16)。投射方向用字母 s 表示。我们来研究在平面Π上的点场。依给定的方向 s 将这个场的每一个点进行平行投射。在场Π(原场)和场Π′(投影场)之间建立起点的对应。第一个场的每一个点 A 对应于第二个场的一个点 A'，反之亦然。这种对应称为透视仿射对应或亲似对应[①]。显然，亲似对应是透视同素对应的一种特殊情况。因此它具有每一个透视同素对应所固有的特性。我们来重提一下这些特性：1)对应是一对一的；2)直线对应于直线；3)点和直线的相互从属性保持不变(即如果点 A 属于直线 a，则点 A' 属于直线 a')；4)投射线通过投射中心。在平行投射的情况下，这些投射线互相平行(因为它们通过非固有点)；5)平面Π和Π′的交线是对应中的二重点的轨迹。在亲似对应中，这条交线称为亲似轴。

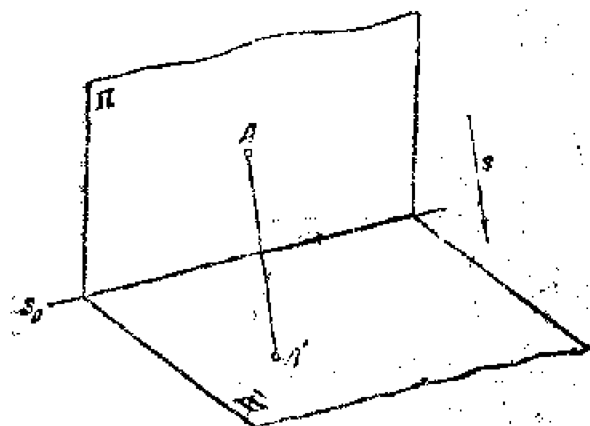


图 16

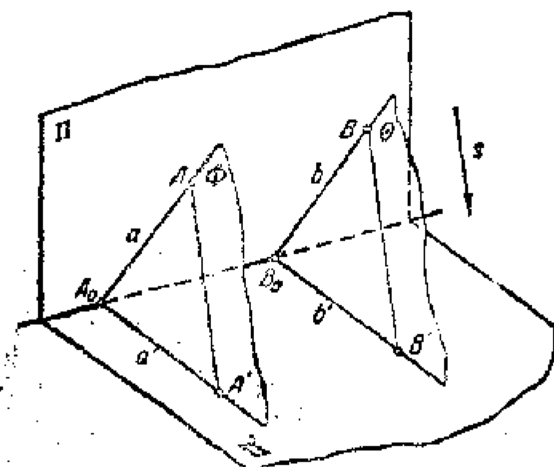


图 17

2. 除了上述的每一个透视同素对应(包括平行透视在内)都具有的特性之外，亲似对应还具有下面的特性：

1) 一个场的平行直线对应于另一个场的平行直线。

为了证明这个特性，我们来研究平面Π上两条任意的平行直线($a \parallel b$)。将这两条直线依方向 s 投射到平面Π′上(图17)。直线 a 和 b 的投射平面Φ和Θ是互相平行的，因为它们包含着两对互相平行的直线(a、AA'；b、BB')。投影 a' 和 b' 是这两个平面与平面Π′的交线，因此它们是平行的。

2) 一个场的三个点的简比等于另一个场的三个对应点的简比。

先阐明"三个点的简比"这个概念。假定三个点 A、B 和 C 位在同一直线上，那么，线段比 $\frac{AC}{BC}$ 称为三个点的简比，并用(ABC)来表示。

将点 A、B、C 平行投射到平面Π′上(图18)。对应的直线 AB 和 $A'B'$ 相交于亲似轴 s_0。因此在角 CD_0C' 的两条边上得到夹在平行直线间的几个线段。其中将有：

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC}{BC} \quad 或 \quad (A'B'C')=(ABC)。$$

这个式子就表现出亲似对应中三个点的简比保持不变的这种特性。

3. 两个对应点(A 和 A')到亲似轴 s_0 的距离之比是一个常数，而且与这对对应点的选择无关。

假设，点 A 和 B 对应于点 A' 和 B'(图19)。由这些点向轴 s_0 作垂线，便得到它们到轴的距离，距离总是在作

① 仿射的——来源于拉丁字affinitas一词，它的意义是"亲戚关系"和"同族关系"。

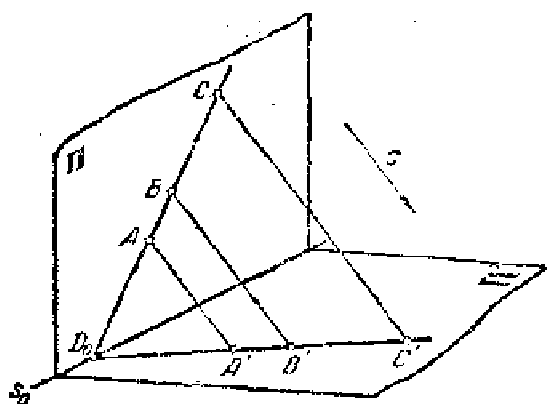


图 18

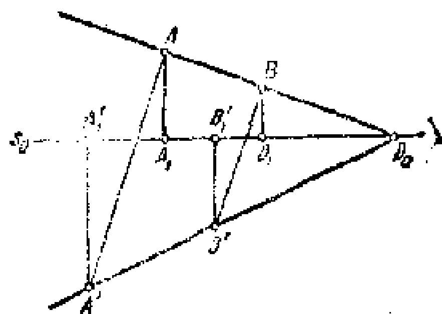


图 19

正的而与垂线的方向无关。

可以写出：

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AD_0}{BD_0};\quad \frac{A'A_1'}{B'B_1'}=\frac{A'D_0}{B'D_0}.$$

但是，如从图中所见：

$$\frac{AD_0}{BD_0}=\frac{A'D_0}{B'D_0},$$

因此，

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{A'A_1'}{B'B_1'}$$

或者

$$\frac{AA_1}{A'A_1'}=\frac{BB_1}{B'B_1'}=k=\text{常数}。$$

用 k 表示对应点的距离的定比。

4. 平面 Π 上两个原图形的面积之比，等于平面 Π′ 上两个对应图形的面积之比。

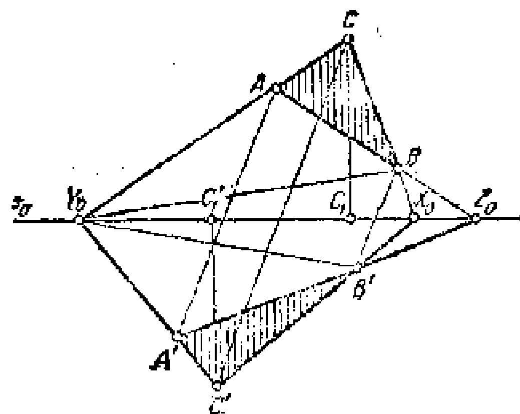


图 20

现在分为下面几种情况来证明：

1) 两个三角形在轴 s_0 上具有公共边，

设在图 20 上有两个对应的三角形 Y_0CX_0 和 $Y_0C'X_0$。它们的面积之比可表达如下：

$$\frac{\triangle Y_0CX_0}{\triangle Y_0C'X_0}=\frac{Y_0X_0\cdot CC_1}{Y_0X_0\cdot C'C_1'}=\frac{CC_1}{C'C_1'}=k。$$

2) 两个三角形在轴 s_0 上有一个公共顶点，三角形 Y_0CB 和 $Y_0C'B'$ 就是这样。这两个三角形的对应边 BC 和 $B'C'$ 应当在轴 s_0 上相交（交于点 X_0）。根据第一种情况，可写出：

$$\frac{\triangle Y_0CX_0}{\triangle Y_0C'X_0}=k;\quad \frac{\triangle Y_0BX_0}{\triangle Y_0B'X_0}=k。$$

但是 $\triangle Y_0CB=\triangle Y_0CX_0-\triangle Y_0BX_0$（$\triangle Y_0C'B'$ 的面积可类似地表达），因此我们有：

$$\frac{\triangle Y_0CB}{\triangle Y_0C'B'}=k。$$

3) 一般情况的两个对应三角形。设有两个对应的三角形 ABC 和 $A'B'C'$。试研究其中之一，例如 ABC，它的面积可表达如下：

$$\triangle ABC = \triangle Y_0X_0C - \triangle Y_0BA - \triangle Y_0X_0B。$$

这个等式右边所有的三角形都属于已研究过的两种情况，所以，应用上面所证明的结果，就可将等式改写成这样：

$$\triangle ABC = k\cdot\triangle Y_0X_0C' - k\cdot\triangle Y_0B'A' - k\cdot\triangle Y_0X_0B'$$

或

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= k(\triangle Y_0X_0C' - \triangle Y_0B'A' - \triangle Y_0X_0B')\\ &= k\cdot\triangle A'B'C'。\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = k = 常数。$$

（证毕）

4）由两个对应三角形的面积导出的性质，不难推广到两个对应多角形的情况。事实上，每一个多角形都可分为几个三角形，并且多角形的面积可用组成它的那些三角形的面积之和来表示。对于对应的多角形，划分为同样数目的三角形，也是可以做到的。结果将有：

$$\frac{S}{S'} = k = 常数。$$

5）最后，这个性质可以推广到由对应的曲线所围成的两个面积的情况。

用Δ和Δ'表示由两条对应曲线所围成的面积。在围成面积Δ的曲线内画一内接多角形，并用字母S_n表示这个多角形的面积。

设内接多角形的每一条边趋近于零，则边数(n)无限增加而趋近于无穷大。于是我们得到：

$$\Delta = \lim_{n\to\infty} S_n。$$

对于面积Δ'，将有同样的结果：

$$\Delta' = \lim_{n\to\infty} S'_n。$$

式中S'_n是与多角形S_n对应的多角形的面积。

因为在整个过程中

$$S_n = k\cdot S'_n,$$

所以，转为极限时，将有：

$$\Delta = k\cdot\Delta'。$$

因此，

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = k。$$

设Δ和Δ_1是由两条任意形状的曲线所围成的面积，而Δ'和Δ'_1是对应的曲线所围成的面积，于是，根据证明，将有：

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\Delta_1}{\Delta'_1} = k,$$

或者，交换比例式的内项：

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\Delta'}{\Delta'_1}$$

（证毕）

这样一来，两个任意面积的比值是不变的，即它是透视仿射对应的不变量。

5. 研究当两个场在同一平面时的亲似对应是非常重要的。使平面Π'绕亲似轴s_0旋转直到与平面Π重合，就会得到这种情况。这时亲似场的所有特性仍然有效，因为在整个旋转过程中，在平面Π和Π'上的这两个场始终保持不变（图21）。

应该特别注意，连接各对对应点的直线（连系线）的平行性，当平面Π和Π'重合之后也保持不变。实际上，

当平面Π和Π′重合时，等式 $\frac{AD_0}{BD_0}=\frac{A'D_0}{B'D_0}$ 没有受到破坏。可见，直线 AA'、BB'、CC' 是平行的，因为它们连接着一个角的两条边上的几个成比例的线段。

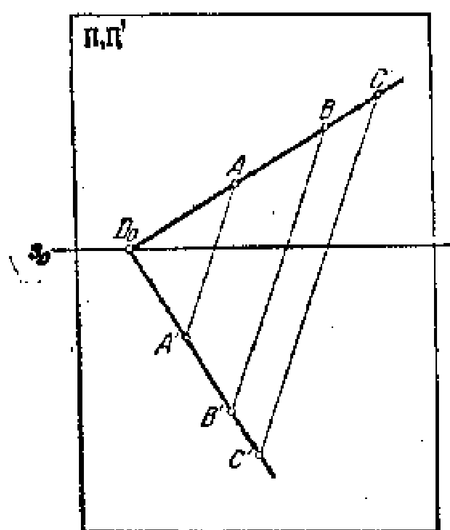


图 21

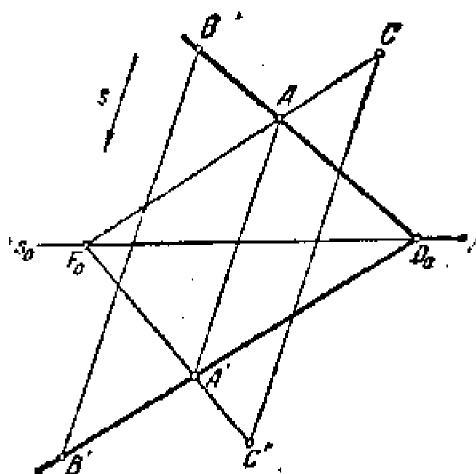


图 22

6. 现在来研究怎样给定在同一平面上的两个场的亲似对应。显然，这个对应不能用平行投射法来建立，因为这两个场的平面是重合的。我们来证明，这样的亲似对应可以由亲似轴 s_0 和一对对应点 A、A' 给定（图 22）。

事实上，为要作出对应于已知点 B 的点 B'，可按下面方法进行。直线 $A'B'$ 和 AB 作为对应的直线应该相交于轴 s_0 上的二重点 D_0，这个点可由已知直线 AB 确定（$D_0=AB\times s_0$）。由此作出对应的直线 $A'D_0$。此外，因为所求的点 B' 应当在连系线 $BB' /\!/ AA'$ 上，所以这个点就是直线 BB' 与 D_0A' 的交点（$B'=BB'\times D_0A'$）。

同样可以在场Π上作出与场Π′上已知点 C' 对应的点 C（参看图 22）。

从上述可知，给定亲似轴和一对对应点便完全确定一个亲似对应。如果沿亲似轴 s_0 将图弯折起来（参看图 18 和 21），场Π′就是场Π的平行投影，这可从亲似对应的特性（三个点的简比保持不变，因而连系线的平行性也不变）推导出来。

7. 上面已经叙述过当给出亲似轴 s_0 和一对对应点（A、A'）时求两个亲似对应场中的对应点的作法。不过，如果直线 AB（图 23）与亲似轴交于图外时，这个方法就不方便了。在这种情况下，可以采用另一种方法来求对应元素（参看图 23）。

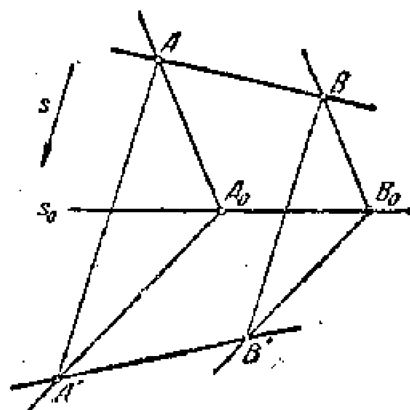


图 23

从已知点 A 到点 A' 作一任意折线 AA_0A'。显然，从点 B 到所求的点 B' 的对应折线，可由平行于所作折线的线段组成：如果 $BB_0 /\!/ AA_0$，则 $B_0B' /\!/ A_0A'$。然后找出点 B'，即直线 B_0B' 与 BB' 的交点（$B'=B_0B'\times BB'$）。

从图中看出，上述求对应直线的方法，无论已知直线处在怎样的位置都可以采用。这个方法称为相似三角形法（事实上，三角形 AA_0A' 相似于三角形 BB_0B'）。

8. 上面已研究过两平面场的透视仿射（或亲似）对应。如果我们将两平面中的一个平面场平行投射到其余那个平面上，就可以得到这种对应。其中也研究过当两个场的平面重合时的情况。正如我们所见，这样的两个场的对应点，位在平行的直线（连系线）上。

换句话说，亲似场占有平行透视的位置。

将两个平面中的一个绕着它们的交线（亲似轴）旋转，并不破坏两亲似场的平行透视位置。但是可以改变一下两亲似场之一所在的平面的位置，这样，这两个场便不再处于亲似对应所特有的平行透视位置。这时，这两个场的一一对应称为仿射对应。对于这种对应，上面讲过的两个场的亲似对应的特性仍然有效，只不过两个场不再处于平行透视的位置。

这样一来，平面场的仿射对应，可以理解为这样的一种同素对应，即直线的平行性和三个点的简比没有受到破坏的同素对应。

特别是，如果我们使已知的平面场Π作相似变换，则得到的场Π′显然是场Π的仿射对应场。原因是在相似变换以后，第一个场的平行直线仍对应于第二个场的平行直线。所以，相似变换是仿射变换[①]。

§4. 椭圆——圆的仿射对应曲线

1. 假设在两个平面场Π和Π′之间已建立了仿射对应。场Π上每一个图形Φ都对应着场Π′上某一个仿射于Φ的图形Φ′。例如，场Π上的正方形对应于场Π′上的四边形。根据仿射对应的特性，这个四边形应该是平行四边形，因为两直线的平行性在仿射对应中没有受到破坏。正方形的对角线互相等分。这种特性在仿射于正方形的平行四边形的对角线上也保持不变。同时，正方形的相等的线段（四条边和两条对角线）变为仿射平行四边形的不相等的线段。这样，在每一个图形中都可以分出一些在仿射变换中保持不变的性质，这些性质我们简称为仿射性质（在仿射变换方面的不变性质）。每一个图形都可以用这个观点来分析。

2. 我们来研究场Π的圆和场Π′上与它对应的图形。

定义 与圆成仿射对应的图形称为椭圆。

椭圆的这个定义，使我们能够在弄清楚圆的仿射性质的基础上来明确椭圆的性质。

3. **对称中心** 圆是一条中心对称曲线，即它具有一个对称中心 O。圆的每一条直径 AB 被圆心等分，可以写成 $AO=OB=-BO$ 或 $(ABO)=-1$。因为直线上三个点的简比在仿射变换中是不变的，所以圆的仿射图形（椭圆）也应具有类似的性质，即椭圆的直径也应被点 O' 等分。因而点 O' 是椭圆的对称中心。所以，椭圆是一条中心对称的曲线。

4. **共轭直径** 我们来研究圆的两条互相垂直的直径 AB 和 CD（图 24）。直径 CD 等分所有平行于直径 AB 的弦。

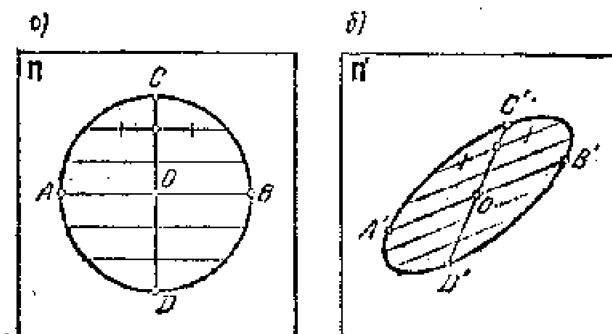


图 24

定义 如果两条直径中的任何一条直径都等分平行于另一条直径的所有的弦，则这两条直径称为共轭直径。

从这个定义看出，圆的每两条互相垂直的直径同时也是共轭直径。这样，对圆的性质来说，两直径的共轭和两直径的垂直是一致的。当场Π经过仿射变换后，应该注意，圆的共轭直径变为椭圆的共轭直径，因为共轭是由

① 关于仿射变换的更详细知识，参看 H. Ф. 切特维鲁新等《画法几何教程》，第 36 页，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1956 年版。

弦的平行和弦的被等分来确定，而这两个性质在仿射变换方面是不变的。所以，圆的共轭直径 AB、CD 将对应于椭圆的共轭直径 $A'B'$、$C'D'$。因此，直径 $C'D'$ 等分所有平行于直径 $A'B'$ 的弦。这样，两直径的共轭性质是仿射的，但两直径的垂直性质在一般情况下不能保持。互相垂直的直径 AB 和 CD 对应于不再垂直的直径 $A'B'$ 和 $C'D'$（参看图 24）。

5. 切线　过点 B 引圆的切线 t（图 25）。

大家知道，圆的切线垂直于过切点的半径。因此，切线平行于与上述直径 AB 共轭的直径。于是，对圆来说：直径两端的切线平行于与该直径共轭的直径。切线的这一种性质是仿射的，同时，在场 Π 变换之后也不被破坏。它确定了过椭圆上已知点作切线的简单方法。

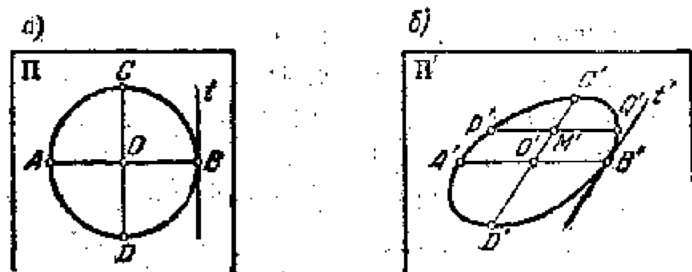


图 25

设有一个以点 O' 为中心的椭圆。要求过椭圆上一点 B' 作切线。为此，引椭圆的直径 $A'O'B'$，并作出与它共轭的直径 $C'D'$。直径 $C'D'$ 的作法不难，先作出弦 $P'Q'$，并以点 M' 等分该弦，这时直径 $C'O'D' \equiv O'M'$，并与直径 $A'B'$ 共轭。剩下一步是过点 B' 引平行于直径 $C'D'$ 的直线。这条直线就是椭圆在点 B' 的切线。

如果在场 Π 上画出已知圆的外切正方形，则在场 Π' 上我们得到外切于对应椭圆的平行四边形。要迅速确定椭圆的形状，利用外切于椭圆的平行四边形最为有利。如果在图上给出了椭圆的两条共轭直径 $A'B'$ 和 $C'D'$（图 26），这样的平行四边形便不难作出。

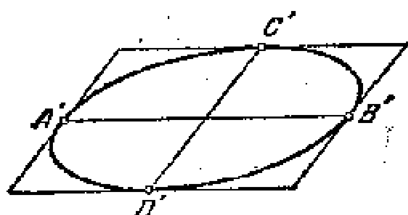


图 26

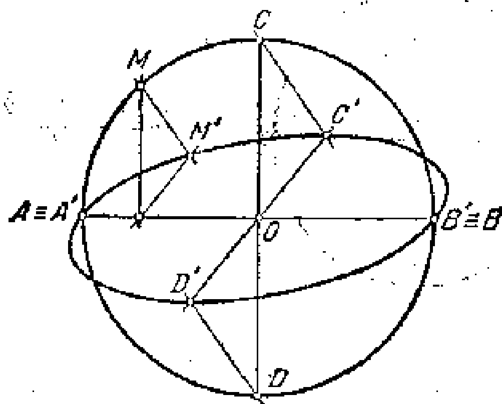


图 27

6. 我们来证明，两条共轭直径 $A'B'$ 和 $C'D'$ 完全确定一个椭圆。例如，给出两条任意的但互相等分的线段 $A'B'$ 和 $C'D'$（图 27）。我们把它们看作是椭圆的共轭直径。作亲似场 Π 和对应于场 Π' 上的椭圆的圆。两个场的亲似可建立如下：取直线 $A'B'$ 作为亲似轴。于是，圆的直径 AB 便对应于与该直径重合的椭圆的直径 $A'B'$（$AB \equiv A'B'$）。根据条件，椭圆的直径 $A'B'$ 和 $C'D'$ 共轭，所以亲似圆的直径也应当共轭，因而也就互相垂直（$AB \perp CD$）。圆的点 C 对应于椭圆的点 C'。现在，场 Π 和 Π' 的亲似对应已由亲似轴（$A'B' \equiv AB$）和一对对应点（C'、C）所确定。作出亲似圆之后，就可以找到椭圆上任意多个点，因此，椭圆可以完全确定。在图 27 上表示出点 M' 的作法。

试证明所作的椭圆是具有一对共轭直径（$A'B'$，$C'D'$）的唯一的椭圆。假设有一个具有同一对共轭直径而用

另一种作图方法得到的椭圆。我们来证明第二个椭圆与第一个椭圆重合。

根据定义，第二个椭圆是仿射对应于场 Π_1 上某一个圆 (A_1B_1, C_1D_1) 的图形。我们使场 Π_1 和 Π' 达到透视位置。为此，先对场 Π_1 作相似变换，使得在已变换的场 $\overline{\Pi}_1$ 和场 Π' 中，对应的线段 A_1B_1 和 $A'B'$ 全等。这就是说，相似系数 $k=\frac{A'B'}{A_1B_1}$。然后，将两个场的平面重叠在一起，使线段 A_1B_1 和 $A'B'$ 重合。于是直线 $A'B'$ 变为亲似轴，而点 $\overline{C_1}$ 与点 C 重合。因此，场 $\overline{\Pi}_1$ 与场 Π' 上所有的点都重合，其中包括圆 $(\overline{A_1B_1}, \overline{C_1D_1})$ 和圆 (AB, CD) 重合，因此，在场 Π' 上与这些圆对应的两个椭圆也重合。

7. 椭圆是亲似于圆的曲线这一定义，使我们可以采用其它方法作椭圆，如果给出椭圆的两条共轭直径的话。

设有场 Π 的圆 $O(AB, CD)$ 和场 Π' 上亲似于它的椭圆 $O'(A'B', C'D')$。如果 AB 和 CD 是一对互相垂直的直径，而 M 是圆上一个任意点，试在场 Π' 上作出椭圆的对应点 M'。引直线 BM，使它和直线 AC 相交于点 N（图 28）。在三角形 ABN 中，直线 AM 和 BC 是高线。用字母 P 表示它们的交点。那么，从顶点 N 到边 AB 的第三条高线显然通过点 P。现在来研究，在亲似场 Π' 上与这个图形对应的将是什么。这就是：圆 $O(AB, CD)$ 变为椭圆 $O'(A'B', C'D')$。并且，圆的互相垂直、因而共轭的直径 $(AB\perp CD)$ 变为椭圆的共轭直径 $(A'B', C'D')$。三角形 ABN 变为三角形 $A'B'N'$。线段 BC 对应于线段 $B'C'$。平行于直径 CD 的直线 NP 变为平行于椭圆直径 $C'D'$ 的直线 $N'P'$。于是，三角形 ABN 的第三条高线 AM 就变为直线 $A'M'$（图 28, б）。这样，便得到利用椭圆和圆的亲似来逐点作椭圆的方法。这个方法简单归纳如下（参看图 28）。设椭圆由共轭直径 $A'B'$、$C'D'$ 给出。在直线 $A'C'$ 上取一任意点 N'，把它和点 B' 连起来。

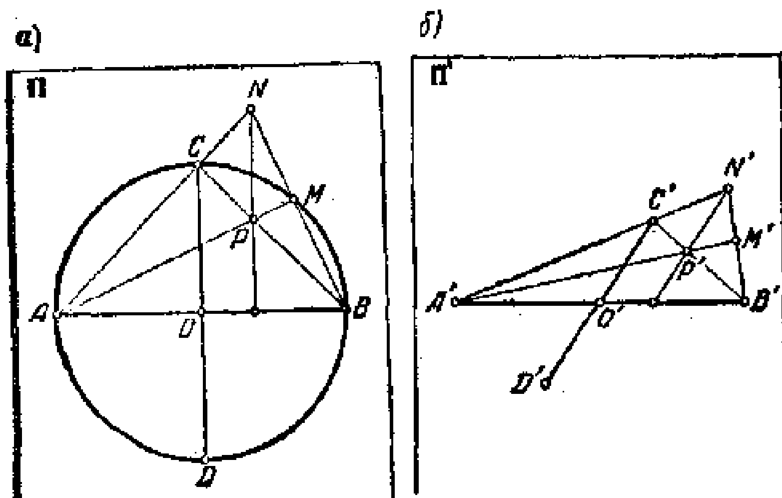


图 28

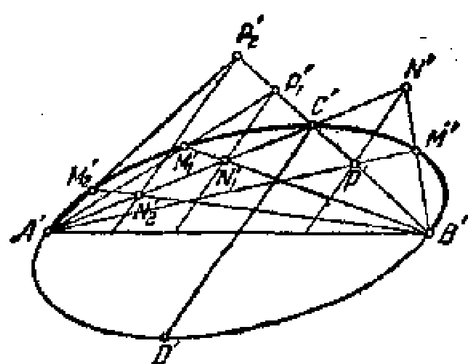


图 29

再用直线连接点 B' 和 C'。由点 N' 引平行于直径 $C'D'$ 的直线，并找出它与直线 $B'C'$ 的交点 P'。那么，直线 $A'P'$ 与 $B'N'$ 的交点就是所求椭圆上的点 $M'(M'=A'P'\times B'N')$。在图 29 上表示出椭圆的这种逐点作图法。

8. 我们来看一看，亲似于椭圆的图形是怎样的曲线，或者，换句话说，一个椭圆依任意方向平行投射到某一投影面 Π'' 上会得到怎样的投影。

正如我们所见，椭圆可以由两条共轭直径确定，并且可以按图 28, б 中所示的图形作出。如果把这个图形投射到新的投影面 Π'' 上，则在平面 Π'' 上得到类似的图形。这个图形为我们确定一个新的椭圆，这就是原来在平面 Π' 上的椭圆的投影。因此，椭圆的平行投影是椭圆。

这个结论的应用可说明如下：设有一旋转柱面，我们用不平行于柱面母线的平面来截割它。那么，在截面上得到一条曲线，这条曲线就是椭圆。事实上，这条曲线可以看作是柱面底圆的平行投影。

一般可以说，以椭圆为底的任意柱面的平截面是椭圆。这可以从上述有关椭圆的平行投影的结论中看出(图 30)。

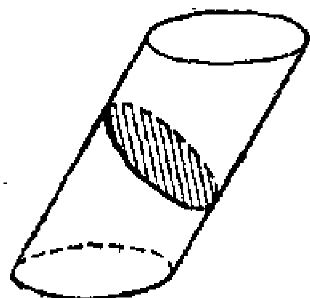


图 30

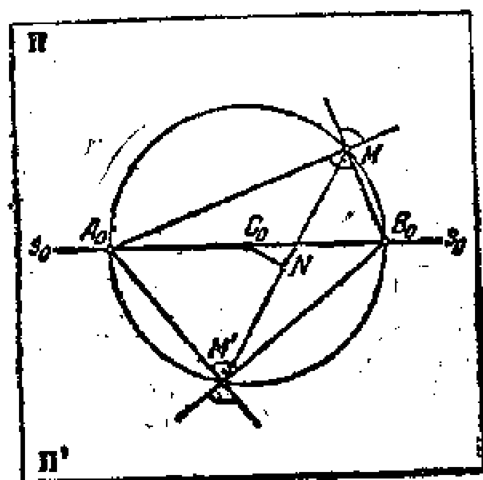


图 31

§5. 仿射对应场的主方向·椭圆轴

1. 我们先来研究两个亲似场Π和Π'。假定这两个场的对应是由亲似轴 s_0 和一对对应点 M 和 M' 建立的(图 31)。如果通过点M引一对互相垂直的直线 MA_0 和 MB_0，则在亲似场里，与它们对应的将是直线 $M'A_0$ 和 $M'B_0$。这两条直线是不互相垂直的。在特殊情况下，角 $A_0M'B_0$ 可以是直角，这时我们得到一个在顶点M 和M' 处都是直角的四角形 $MA_0M'B_0$。大家知道，外接于这样的四角形可以画一个圆。可以用那两个直角所对的线段 A_0B_0 作为这个圆的直径。圆心可由过线段 MM' 的中点N所作的垂线与直线 s_0 的交点来确定。根据这样的道理，我们就可以得到所谓亲似场Π和Π'的主方向的作法。

2. 设两个场的亲似由亲似轴 s_0 和一对对应点(M, M')给出。我们等分线段 MM'，并在其中点N处引垂线 NC_0，这垂线与亲似轴 s_0 的交点 C_0 即为所求的圆心。用圆心 C_0 和半径 $C_0M=C_0M'$ 作圆。

标出该圆与亲似轴的交点 A_0 和 B_0，在场Π和Π'的亲似关系中，就可找到两对本身互相垂直并彼此对应的直线：

$$MA_0\perp MB_0;\quad M'A_0\perp M'B_0$$

这样两对对应的互相垂直的直线，称为亲似场Π和Π'的主方向。

值得注意，正如图31上所见，在点M和M' 处作两对主方向这个问题，只有唯一的解。这就是说，通过亲似场的每一对对应点有唯一的一对主方向。

在特殊情况下，直线 NC_0 可能平行于亲似轴，这时亲似方向垂直于亲似轴。不过，即使在这种情况下，对于亲似场的每一对对应点M和M' 也有一对主方向：其中一主方向与亲似方向MM' 重合，而另一主方向则平行于亲似轴。

3. 当方向 MM' 垂直于亲似轴、且线段MM' 的中点落在亲似轴上时的亲似是一种特殊情况（在这种情况下，两个亲似场的点对称于亲似轴)。这时，第一个场上每一对互相垂直的直线对应于第二个场上一对也是互相垂直的直线。求主方向便成为一个不能确定的问题。

如果我们从占有透视位置的亲似场转到两个任意配置的仿射对应场的一般情况，则对于每一对对应点，两个场的主方向问题都有唯一的解。事实上，前面已经指出，利用相似变换和亲似变换可以从一个场变为另一个场(参看第 19 页)。使这两个场达成透视位置之后，就可以找到主方向。当两个场恢复原来的位置时，主方向的意义不变。

4. 椭圆轴。前面已经指出，圆的每两条共轭直径变为椭圆的两条共轭直径。同时，圆的共轭直径总是互相垂直的，而对应的椭圆的共轭直径一般不垂直。但在圆的共轭直径成为主方向的情况下，与它们对应的将是椭圆的共轭而且互相垂直的直径。椭圆的这样两条共轭而且互相垂直的直径称为椭圆轴。因为我们只有一对主方向，所以椭圆只有一对轴。在图 32 上表示出椭圆轴的作法。这个作法与图31上主方向的作法实质上毫无区别。

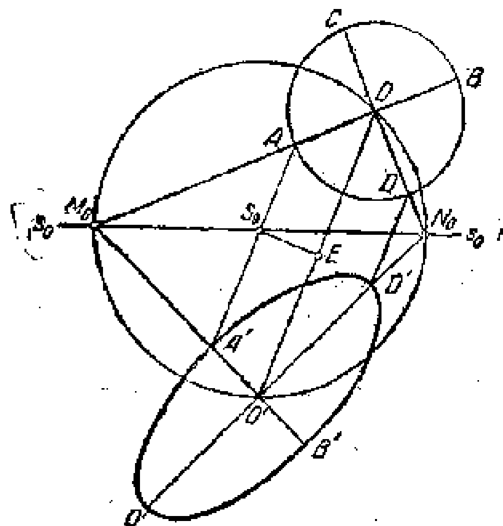


图 32

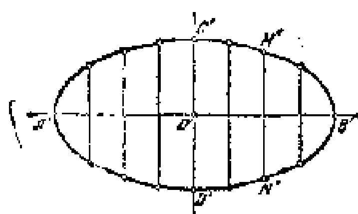


图 33

椭圆轴必等分所有垂直于它的弦，指出这一点是很重要的。因此，椭圆轴同时是椭圆的对称轴(图 33)。

5. 我们来说明，如果已知椭圆的轴，怎样作出椭圆的点。

设在图 34 上已知椭圆轴 $A'B'=2a$ 和 $C'D'=2b$。可以把椭圆看作是亲似于一个以 $O\equiv O'$ 为中心，并以重合于椭圆轴 $A'B'$ 的 AB 为直径的圆的图形。于是，圆的直径 CD 对应于椭圆的第二条轴 $C'D'$。这样，椭圆及其对应圆的亲似由亲似轴 $A'B'\equiv AB$ 和一对亲似点(例如 C 和 C')来确定。

假定 M 是圆的任意点，那么，为了确定椭圆的对应点 M'，引直线 $CN_0 \parallel MO$ 到与亲似轴交于点 N_0。

把点 N_0 和 C' 连起来。点 M' 是作为直线 MM_0 与 $O'M'(O'M' \parallel N_0C')$ 的交点而确定的。于是，根据亲似点的特性(参看第 14 页)，我们有 $\triangle N_0CO \backsim \triangle OMM_0$ 和 $\triangle N_0C'O' \backsim \triangle O'M'M_0$。

$$\frac{C'O'}{CO}=\frac{M'M_0}{MM_0}=\frac{b}{a}。$$

由此即可断定，椭圆的对应点还可以用下面的方法作出。先以圆心 O' 和直径 $C'D'$ 作圆。用字母 F 表示直线 $O'M$ 与圆 $O'(C'D')$ 的交点。如果引 $FM' \parallel A'B'$，在直线 MM_0 上就得到椭圆上所求的点 M'。实际上，我们有：

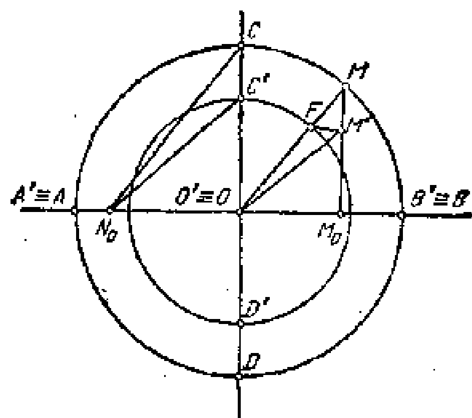


图 34

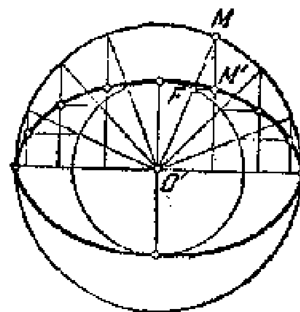


图 35

$$\frac{M'M_2}{MM_0}=\frac{FO'}{MO'}=\frac{b}{a}。$$

如果改变点M在圆上的位置，我们就可作出椭圆的任意个对应点(图 35)。

根据图 34 不难解决下列问题。已知椭圆上点 M' 和轴 $A'B'$。求作椭圆的第二条轴 $O'C'$。

6. 假设有画在椭圆长轴和短轴上的两个圆，如上述情况中所画的那样(图 36)。这时，我们都知道，圆的两条互相垂直的半径 OP 和 OQ 对应于亲似椭圆的两条共轭半径 $O'P'$ 和 $O'Q'$，其作法如图 36 所示。把三角形 OQQ' 按顺时针方向绕中心O旋转 90°，于是 OQ 与 OP 重合，点R与点F重合。平行于直径 $A'B'$ 的直线 RQ' 占有平行于直径 $C'D'$ 的位置。最后，点 Q' 占有位置 $\bar{Q}'$。这样就得到矩形 $FP'P\bar{Q}'$，它的边平行于直径 $A'B'$ 和 $C'D'$。矩形的对角线 FP 和 $P'\bar{Q}'$ 相交于点 S。延长对角线 $P'\bar{Q}'$ 直到与椭圆轴交于点M 和 N。在图上看到，以 S 为圆心，SO 为半径的圆通过点 M、N 和 O。事实上，$\triangle OSN \backsim \triangle FSP'$，但是三角形 FSP' 是等腰的，因而三角形 OSN 也是等腰的，亦即 $OS=SN$。同样可得 $OS=SM$。线段 $OS=SM=SN$ 的相等，正说明 O、M 和N位在以 S 为中心的圆上。

图形 $OFP'N$ 是等腰梯形。因此 $P'N=FO=b$。同样：$P'M=PO=a$。由此可以断定，对于任意位置的点 P 和 P'，线段 MN 的长度是不变的，并且等于椭圆两半轴之和 $a+b$。

这时，点 P' 在线段 MN 上占有确定的位置($P'N=b$, $P'M=a$)。当点P沿着圆移动时，点 P' 即画出一个椭圆，而线段 MN 则以其两端点沿着椭圆轴而滑动。

根据上述，我们可以作出结论：

设有一定长度的线段 MN，使其两端点沿着两条互相垂直的直线滑动，当线段移动时，线段上的任意点 P'将画出一个椭圆，其半轴是线段 a 和 b ($P'M=a$, $P'N=b$)。

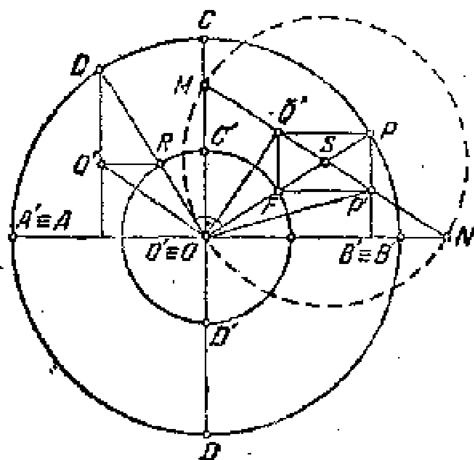


图 36

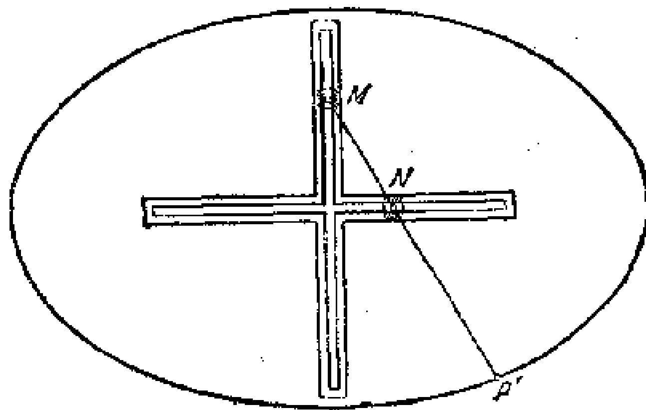


图 37

椭圆规——根据给出两个半轴的大小来画椭圆的仪器——就是以这个原理作为基础的(图 37)。

7. 图 36 上的作法可用来解下面的问题：

已知椭圆的一对共轭直径，求作椭圆轴。

设线段 $O'P'$ 和 $O'Q'$ 是椭圆的共轭半径。将其中之一，例如 $O'Q'$，向 $O'P'$ 旋转 90°，得线段 $O'\bar{Q}'$。然后引直线 $P'\bar{Q}'$，并标出其中点 S。以点S为圆心，SO' 为半径画圆，与直线 $P'\bar{Q}'$ 交于点 M 和 N。这时，直线 $O'N$ 和 $O'M$ 决定椭圆轴的方向，而线段 $P'N=b$ 和 $P'M=a$ 则决定椭圆轴的长度(图 38)。

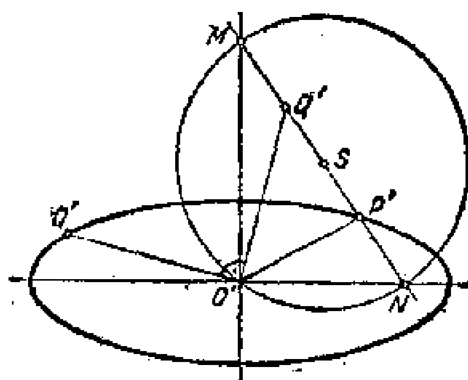


图 38

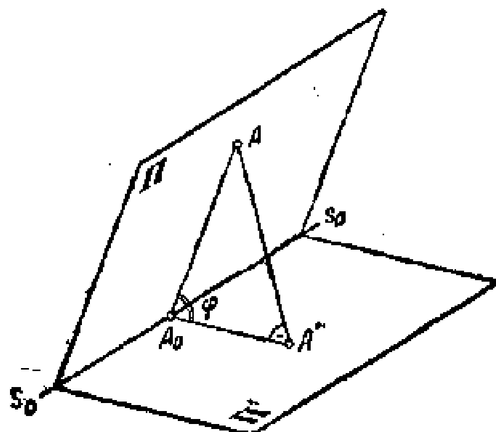


图 39

§6. 两个仿射对应场的正透视位置

1. 如果场Π'是利用场Π的正投射得到的，这样的两个场我们称为正透视场。设A和A'是这样的两个场的两个对应点。那么，我们将有：$AA'\perp\Pi'$；$AA'\perp s_0$(图39)。

试来研究垂直于亲似轴s_0的投射面$AA'A_0$。在三角形$AA'A_0$里，角$A'A_0A$是平面Π和平面Π'所构成的两面角的直线角。用字母φ表示这个角，则：

$$A_0A'=A_0A\cdot\cos\varphi \quad 或 \quad \frac{A_0A'}{A_0A}=\cos\varphi。$$

如果将平面Π或Π'绕亲似轴s_0旋转而使Π与Π'重叠起来，则线A_0A和A_0A'成为一条垂直于轴s_0的直线(图40)。这就可以得出下面的结论：

当两个场处于正透视位置时，亲似方向垂直于亲似轴s_0。

不难相信，这个条件是必要的和充分的。假设亲似方向$AA'\perp s_0$，为了明确起见，设$A_0A>A_0A'$。那么，根据公式 $\cos\varphi=\frac{A_0A'}{A_0A}$，我们便求得角φ。

如果把平面Π绕轴s_0旋转角φ，则在这新的位置里，平面场Π正投射为场Π'。

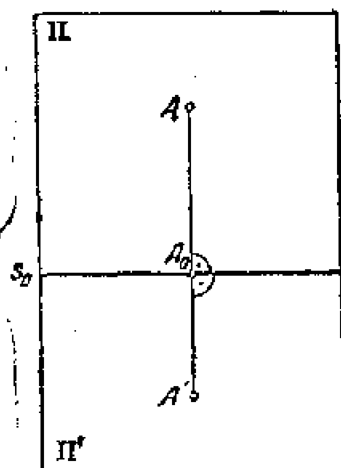


图 40

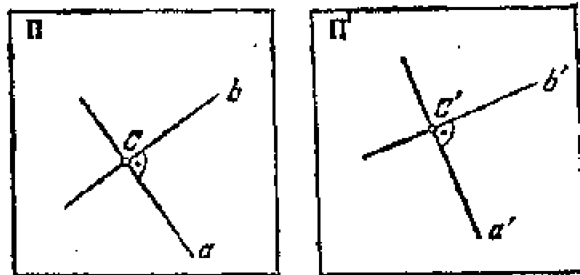


图 41

2. 试证明下面关于使两个仿射对应场达到正透视位置的定理：

定理 借助相似变换和移动两个仿射对应场之一，总可以令其中一个场成为另一个场的正投影而使它们达到正透视位置。

用C和C'表示场Π和Π'的一对对应点(图 41)。假定直线$a\perp b$和$a'\perp b'$是这两个场的主方向。前面已证明，仿射场Π和Π'利用相似变换和移动可以达到平行透视位置，并且可以选择其中一直线，例如，与对应直线a'重合的直线a作为亲似轴。为了看图方便，认为这两个平面重叠在一起(图 42)。点C和C'因位在亲似轴上，应当重合。直线b和b'则重合为一条垂直于亲似轴的直线。同时，点B'对应于点B，因此，亲似方向垂直于亲似轴。

运用相似变换，总可以使两个已知场中的任一个成为另一个的正投影。

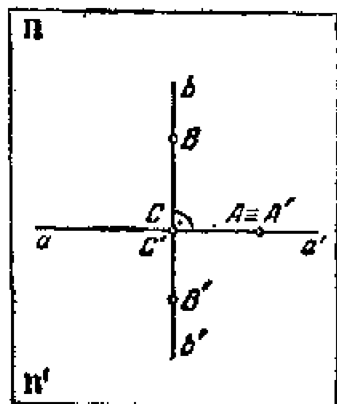


图 42

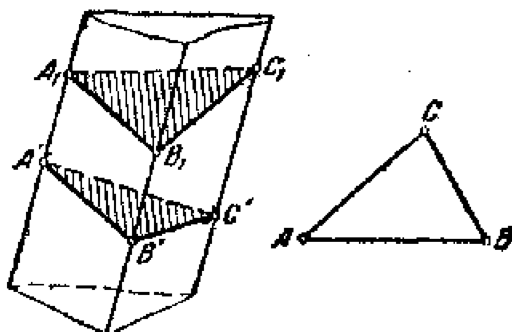


图 43

§7. 波尔克-什瓦尔茨定理

1. 从两个场的正透视位置的定理推出:

1) 设有两个任意三角形ABC和$A'B'C'$，其中任一个三角形都可以看作是与其余那个三角形相似的另一个三角形的正投影。

三角形ABC和$A'B'C'$确定两个场的仿射对应。根据上述，其中一个场经相似变换之后，这两个场可以达到正透视位置。这时，其中一个已知三角形就成为与其余那个三角形相似的另一个三角形的正投影。

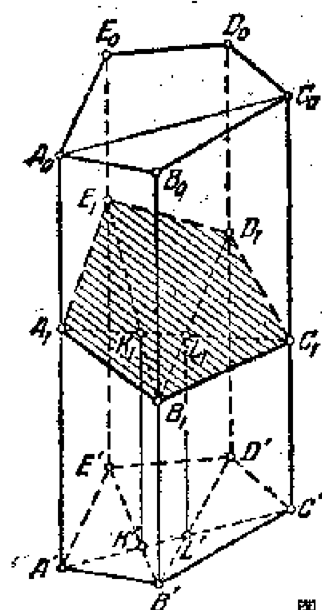
2) 三棱柱总可以用一个平面来这样截割，使在截面上得到一个给定形状的三角形。

用垂直于已知棱柱各棱边的平面截该棱柱，并用字母$A'B'C'$表示其截面。三角形$A'B'C'$可以看作是具有给定形状(三角形ABC的形状)的三角形$A_1B_1C_1$的正投影。因为投射线与已知三棱柱的棱边重合，所以三角形$A_1B_1C_1$是棱柱的截面(图 43)。

3) 任意的棱柱总可以用一个平面来这样截割，使在截面上得到的多角形与仿射于棱柱的底的任意已知多角形相似(图 44)。设有以$A'B'C'D'E'$为底的棱柱和与棱柱的底成仿射的已知多角形$ABCDE$。从已知棱柱分出一个组成部分，即三棱柱$A'B'C'A_0B_0C_0$。根据上述，可以用一个平面截割这个三棱柱，使在截面上得到与三角形ABC相似的三角形$A_1B_1C_1$。用这个平面截割整个棱柱而得的截面是多角形$A_1B_1C_1D_1E_1$。这个多角形平行投射到棱柱的底上，因而与这个底成仿射对应。根据条件，棱柱的底仿射于已知多角形$ABCDE$，所以截面多角形$A_1B_1C_1D_1E_1$仿射于多角形$ABCDE$。因为从另一方面，三角形$A_1B_1C_1$相似于三角形ABC，所以这两个多角形的仿射对应是相似变换。

4) 两个仿射对应图形中的任意一个图形可以看作是与其余那个图形相似的图形的正投影。

两个已知的仿射图形总可以认为确定着它们所属的两个平面场的仿射对应。如上所述，相似变换其中一个



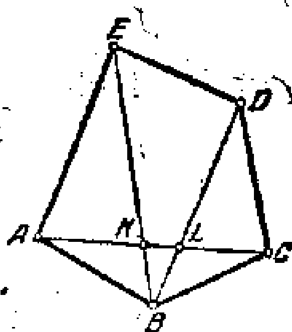
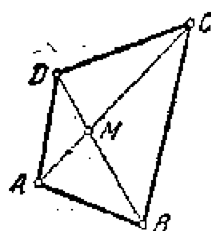


图 44



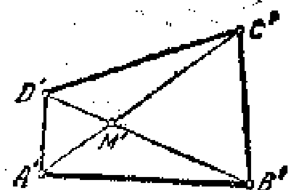


图 45

场之后，就可使这两个场达到正透视位置。这时，其中的一个已知图形是其余那个已知图形的相似图形的正投影。

注 为了作一个与已知多角形成仿射的多角形，可先作包含在这两个多角形里的一对三角形(图 45)。

特别是，对于两个四角形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$，它们成仿射的必要且充分的条件是：两个四角形的对角线分成同一比值。事实上，如果这两个四角形是成仿射的，则可认为它们所属的场的仿射对应是由三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 给定。但这时直线 AC 应当对应于直线 $A'C'$，而两个四角形对角线的交点是对应的，因此应当分对角线为同一比值。所以

$$(ACM)=(A'C'M');\quad (BDM)=(B'D'M')。$$

引用我们所得的结果，可以证明一个基本定理，这个定理对于轴测投影的意义将在第十二章中叙述。

2. 波尔克-什瓦尔茨定理① 任何一个非退化的完全四角形可以看作是一个预先给定形状的四面体的平行投影。

由四个点(顶点)和这些顶点确定的六条直线(边)所构成的图形称为完全四角形。如果四角形的四个顶点不全在同一直线上，这个四角形就称为非退化的完全四角形。

因此，假设给定一个任意的四面体 $A_0B_0C_0D_0$ 和一个完全四角形 $ABCD$(图 46)。这个完全四角形可以看作是某个四面体的投影。于是，完全四角形的六条边可以看作是该四面体的各棱边的投影。四角形对角线的交点(L, M)是在空间四面体的对应棱边上的两个点的投影．这两个点就是在棱边 A_0D_0 上的点 L_0 和棱边 C_0B_0 上的点 M_0。由于在平行投射中三个点的简比的不变性，我们可以根据条件

$$(A_0D_0L_0)=(ADL);\quad (B_0C_0M_0)=(BCM)$$

在四面体的棱边 A_0D_0 和 C_0B_0 上分别找到点 L_0 和 M_0。

取直线 M_0L_0 的方向为投射方向。这就保证点 M_0 和 L_0 在投影面上投射为一个点。依方向 M_0L_0 将四面体进行投射。为此，引平行于直线 M_0L_0 的投射线，这些投射线构成一个棱柱。用任意平面 Π' 截割这个棱柱，在截面上得到完全四角形 $A'B'C'D'$。这时应当有：

$$(A'D'L')=(A_0D_0L_0)=(ADL),$$
$$(B'C'M')=(B_0C_0M_0)=(BCM)。$$

① 参看简史(本书第 272 页)。

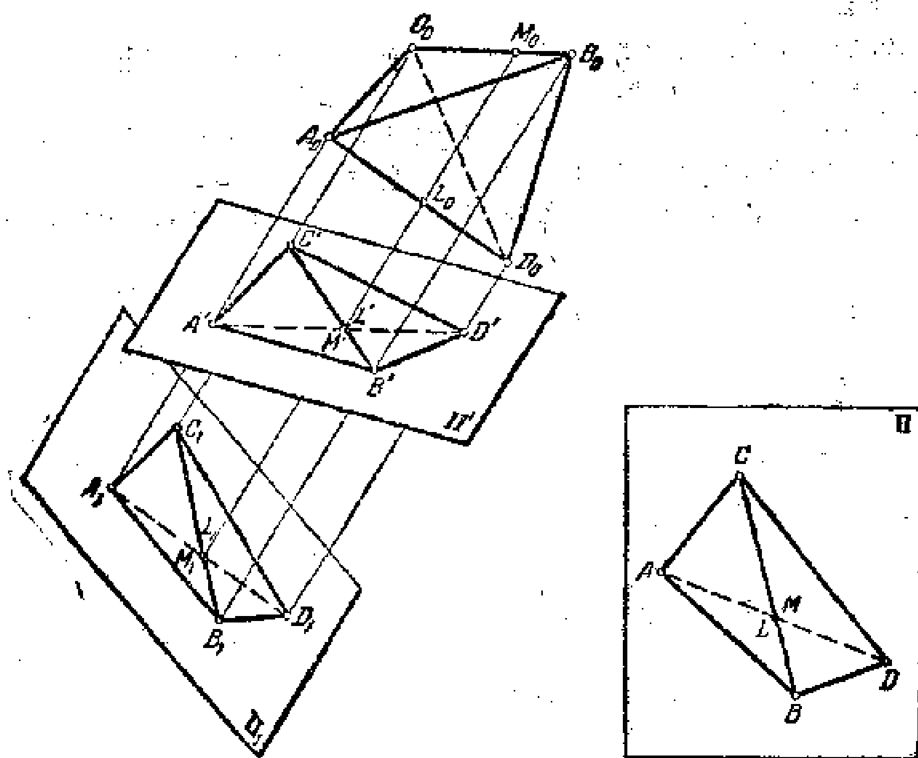


图 46

这些等式表明，完全四角形 $A'B'C'D'$ 仿射于四角形 $ABCD$。把四角形 $A'B'C'D'$ 看作是棱柱的底，就可以作出投射棱柱被平面 Π_1 所截割而与四角形 $ABCD$ 相似的截面 $A_1B_1C_1D_1$。这样，完全四角形 $A_1B_1C_1D_1$ 就是已知四面体 $A_0B_0C_0D_0$ 的平行投影。因此，与四角形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似的已知四角形显然是与已知四面体相似的四面体的投影。

3．波尔克-什瓦尔茨定理的意义是：在投影面上任意给定的完全四角形可以看作是具有给定形状的四面体的平行投影。

假定在平面 Π 上给定一个完全四角形 $ABCD$。此外，还给出了四面体 $A_0B_0C_0D_0$。于是产生了这样的问题，即给定形状的四面体对投影面 Π 应当占有怎样的位置，才能使它平行投射为已知四角形 $ABCD$。正是波尔克-什瓦尔茨定理的证明给出解决这个问题的关键。实际上，上面已经阐明怎样确定四面体的投射方向。方向确定之后，就可以定出截面对投射棱柱的位置。现在，如果取截面 $A_1B_1C_1D_1$ 作为投影面，则投射棱柱以及内接于它的原四面体将完全可以确定。这就能够解决根据四面体的任意给定的投影重建原四面体的问题。这个问题还有其它的解法[①]。

应当指出，原四面体沿投射方向的平行移动并不改变它的投影。因此，四面体的位置只是在平行移动前才是确定的。此外，不难看出，对于逆问题，我们有四个不同的解。事实上，与我们所得的投射棱柱对应的还有第二个投射棱柱，这个棱柱与第一个棱柱对称于投影面。在每一个投射棱柱里，原四面体可占有对称于棱柱法截面的两个实际不同的位置。

4．波尔克-什瓦尔茨定理的实际意义将在第十二章阐述。不过，现在就可以说，这个定理可以作出关于空间直角坐标系的投影的最一般的结论。假设有一个直角坐标系 $Oxyz$，并沿坐标轴截取单位线段（尺度线段）$OE_x=OE_y=OE_z$，就得到一个所谓尺度四面体 $OE_xE_yE_z$。当原四面体是尺度四面体时，应用波尔克-什瓦尔茨定

① E.A.格拉祖诺夫和H.Φ.切特维鲁新《轴测投影学》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1953年版。

鉴于这种情况，我们就有：

任意非退化的完全四角形总可以看作是空间直角坐标系的尺度四面体的平行投影。

这个定理首先由德国几何学家 K. 波尔克于 1853 年以下面的形式发表：

在同一平面上，由同一个点 O' 引出的三条互成任意角度和长度的线段 $O'E'_x$、$O'E'_y$ 和 $O'E'_z$ 是直角坐标轴上由原点 O 起截取的三条相等线段 OE_x、OE_y 和 OE_z 的平行投影(图 47)。

根据这个波尔克定理，轴测轴的体系[①]以及各轴上的尺度可以完全任意地给定。同时，这个体系是空间直角坐标系的平行投影。

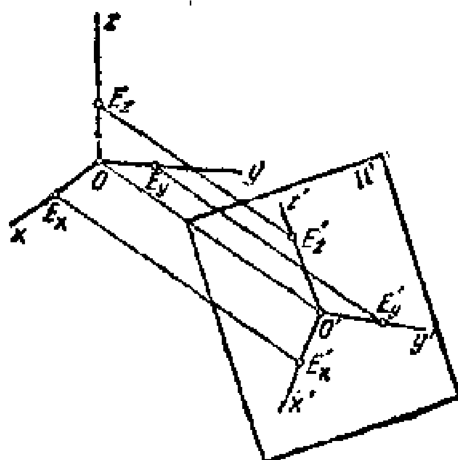


图 47

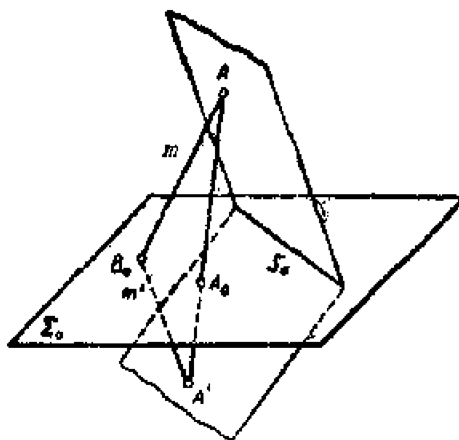


图 48

§8. 关于空间的仿射变换

1. 为了解决空间的问题常有效地加以空间本身的变换。这时，空间被看作是直线和平面的点的集合。在画法几何中应用得最多的是空间本身的亲似变换[②]。这种变换和平面上的亲似变换非常类似，这时点场 Π 被变换为在同一平面上的对应场 Π'。

在空间的亲似变换中，我们将用"亲似平面"Σ_0 代替作为二重点的轨迹的亲似轴(图 48)。空间的每一个点 A 被变换为同一空间的确定的点 A'，反之亦然。各对对应点位在平行直线($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \cdots\cdots$)上。直线 m 被变换为直线 m'，同时，这两条直线在亲似平面 Σ_0 上相交于它们本身的二重点 B_0。每一个平面被变换为一个新的平面，并且两个亲似的平面沿直线 s_0 相交，这条直线是二重直线且位在亲似平面上。因为亲似对应确定空间点的平行投射，所以位在对应平面上的两个平面场是亲似对应的。

我们指出，球面可借助空间变换而变为椭球面。

复 习 题

1. 怎样定义用来补充欧几里得空间的无穷远点或非固有点的概念？

2. 为什么把平面上的无穷远点的轨迹认为是无穷远直线，而把空间的无穷远点的轨迹认为是无穷远平面，是合适的？

3. 两个点场之间怎样的对应才称为一一对应？

4. 什么是同素对应？透视同素对应的性质是怎样的？

5. 试述空间的和平面的笛沙格正定理和逆定理。

---

① 参看第十二章 §2。

② Н. Ф. 切特维鲁新《射影几何学》，第 48 页，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1953 年版。

6. 什么叫透射？

7. 试给出透视仿射对应或亲似对应的定义，这种对应的特性是怎样的？

8. 什么是变形系数？

9. 怎样确定一般情况的仿射对应？

10. 试根据椭圆作为圆的仿射对应图形的定义，列举椭圆的性质。

11. 什么是仿射对应场的主方向？试给出椭圆轴的定义。

12. 试述波尔克-什瓦尔茨定理，阐明它在平行投射坐标轴体系时的涵义。

练 习 题

1. 亲似对应由两对对应直线(a, a')和(b, b')给定。求作亲似轴和亲似方向。

2. 亲似对应由亲似轴s_0和一对对应点(A, A')给定(图 49)。求作对应于已知圆的椭圆和椭圆轴。

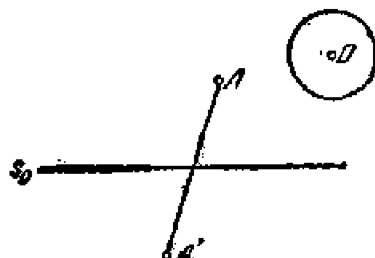


图 49

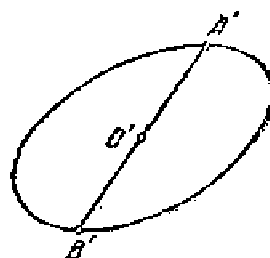


图 50

3. 已给出具有中心O'和直径$A'B'$的椭圆(图 50)。求作平行于直径$A'B'$的椭圆切线。

4. 在图上，椭圆由一对共轭直径$(A'B', C'D')$确定，试过已知点M'作椭圆的切线，但不要画出这个椭圆(图 51)。

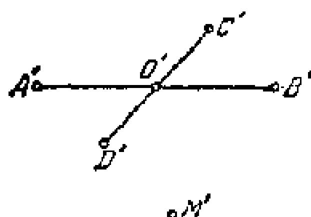


图 51

提示 取直线$A'B'$作亲似轴来作与已知椭圆亲似的圆，然后在圆所在的场上解题，再回到原来所给的图上。

第二章　复合图·复合图上的点、直线和平面·定位问题

在"绪论"里已研究过"可逆图"的作图原则。在实践中最常用的是正投影复合图法。由所画形体的几个互有联系的投影所组成的图称为复合图。正投影复合图法在文献中也称为蒙日法。

这个方法作图简单，而且用于图解问题时也很准确。它能在图上精确地确定图象。它的缺点是图象的直观性差。

研究复合图法，我们要从空间基本元素(点、直线和平面)在由两个投影所组成的复合图[①]上的图象开始。

§1. 点在复合图(两面图)上的图象

1. 试研究由两个互相垂直的平面 Π_1和Π_2组成的固定体系(图 52)。将平面Π_1水平地放置，并称它为水平投影面。这时垂直于它的平面Π_2处于直立的位置。通常认为这个平面摆在观察者的前面，因此称它为正立投影面。我们将把空间的点正投射到这两个平面上。

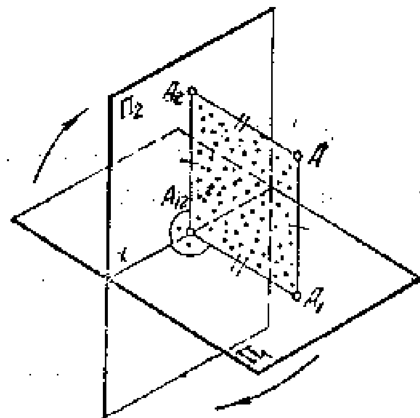


图　52

假定空间有某一点A。点A在平面Π_1上的正投影A_1称为点A的水平投影，而点A在平面Π_2上的正投影A_2称为点A的正面投影。将点A投射到投影面上的直线AA_1和AA_2($AA_1\perp\Pi_1$，$AA_2\perp\Pi_2$)称为投射线(AA_1——水平投射线，AA_2——正面投射线)。两投影面的交线称为投影轴，并用字母x表示。

垂直于投影面的平面称为投射面(垂直于平面Π_1的称为水平投射面，垂直于平面Π_2的称为正面投射面)。平面AA_1A_2通过垂直于平面Π_1的直线AA_1，因此，它垂直于平面Π_1。同样，平面AA_1A_2垂直于平面Π_2。因此，投射面AA_1A_2两次垂直于投影轴x。

平面AA_1A_2与投影轴x的交点是同时属于平面Π_1和Π_2的点，用A_{12}来表示。在垂直于投影轴x的平面AA_1A_2上的直线$A_{12}A_1$和$A_{12}A_2$，垂直于该投影轴。

2. 反之，设A_{12}是投影轴x上的任意一点。从点A_{12}作两条投影轴的垂直线，一条在平面Π_1上，另一条在平面Π_2上。这时位在这两条垂线上的每一对点A_1和A_2在空间确定唯一的一个点A。实际上，两条相交的直线$A_{12}A_1$和$A_{12}A_2$确定了垂直于投影轴x的平面$A_1A_{12}A_2$(因为$A_{12}A_1$

① 由两个投影所组成的复合图称为"两面图"。

上 x 和$A_{12}A_2 \perp x$)。但是垂直于平面Π_1和Π_2的交线 x 的平面也垂直于这两个平面中的每一个，即平面 $A_1A_{12}A_2$对这两个投影面来说都是投射面。因此，由点 A_1和 A_2分别对平面Π_1和Π_2所作的垂线位在一个平面(平面 $A_1A_{12}A_2$)上。它们的交点A就是由已知的一对点 A_1和 A_2所确定的所求空间点。

注 平面Π_1和Π_2上的一对点，如果不在垂直于轴 x 的一个平面上，则不能确定空间中任何一点，因为从这样的点向投影面所作的垂直线将是交叉的直线，所以没有交点。

这样，所研究的方法使每一个点A对应于它的一对投影 A_1 和 A_2，A_1 和A_2与点 A 在同一平面上，而这个平面垂直于两个投影面Π_1和Π_2，因而垂直于它们的交线 x。反之，在垂直于轴 x 的同一平面上的任意两个点 $A_1\subset\Pi_1$ 和 $A_2\subset\Pi_2$，在空间确定唯一的一个点 A。

点A到水平投影面的距离 AA_1 称为点A的高度，而它到正立投影面的距离 AA_2 称为点A的深度。

3. 为了得到平面的图，我们将投影面Π_1按图 52 上箭头所示的方向绕轴 x 旋转，使平面Π_1与平面Π_2重叠，也就是使Π_1的前半面与Π_2的下半面重叠起来。结果，得到由点 A 的两个投影 A_1和 A_2组成的点A的复合图(图53)。两个投影 A_1和A_2位在投影轴 x_{12}[①] 的一条垂直线上，因为垂直于轴 x_{12} 的两条直线 $A_{12}A_1$ 和 $A_{12}A_2$ 具有公共点 A_{12}。在复合图上，连接点的两个投影的直线 A_1A_2称为连系线。正如所见，点的两个投影的连系线垂直于投影轴。

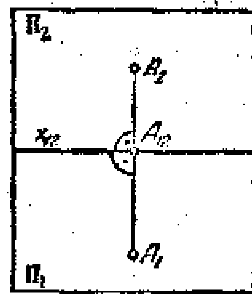


图 53

这样得到的复合图是可逆图（或度量确定图）。事实上，例如观察点A的水平投影 A_1时，在图上就可以知道点A的高度是 $A_{12}A_2$，因为 $A_{12}A_2=A_1A$(参看图 52 和 53)。因此，复合图可以看作是补充了高度线段的投影图，这种投影图的可逆性在"绪论"里已指出过。

4. **空间的象限(隅角)** 我们知道，两个投影面把整个空间划分为四个部分，每个部分称为象限（或隅角)。同时把这些象限按如图 54 所示的次序编以号码，并称它们为第 I、II、III 和第 IV 象限。

如果点A位在第 I 象限，它的水平投影 A_1 便属于Π_1的前半面，正面投影 A_2则属于Π_2的上半面。当两个投影面重叠时，位在第 I 象限的点A的水平投影 A_1 落在轴 x_{12}的下方，而正面投影 A_2则在轴 x_{12}的上方(图 55)。根据原形点(被投射的点)位在不同的空间象限(参看图 54)，在复合图上可得到它们的投影的相应位置(参看图 55)。反之，根据投影的位置也可以判断空间的点位在那一个象限。

5. 空间点在平面Π_1上的投影的集合(总和) 称为点的水平投影场，而空间点在平面Π_2上的投影的集合称为点的正面投影场。

---

① 因为投影轴 x 是同时属于两个投影面Π_1和Π_2的直线，所以在复合图上用 x_{12}表示。

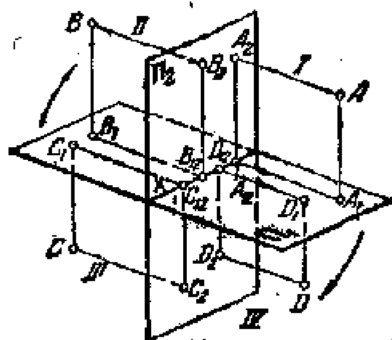


图 54

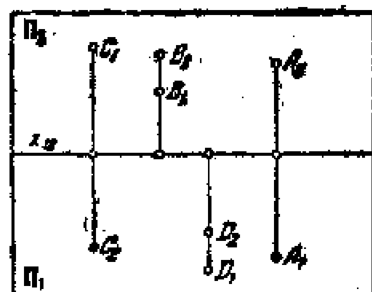


图 55

当投影面重叠时，两个投影场就位在一个平面(图面Π_2)上，但这不是说，每个空间点的水平投影和正面投影都重合。这只有在唯一的一种情况下才有可能，即只有当点T位在“偶数”等分面Λ(该平面等分平面Π_1与Π_2之间的两面角，且位在第II和第IV象限内)上时，点T的两个投影T_1和T_2才会在复合图上重合(图56)。这时，位在平面Λ上的每一个点的高度和深度相等($T_1T=T_2T$，$Q_1Q=Q_2Q$)，因而当投影面重叠后，这些点的两个投影便重合(参看图57上的点$T_1\equiv T_2$)。空间点的两个投影在复合图上重合时，这种点称为重合点。如果平面上的每一个点都是重合点，则这个平面称为重合平面。显然，偶数等分面Λ是两面重合图的重合平面。

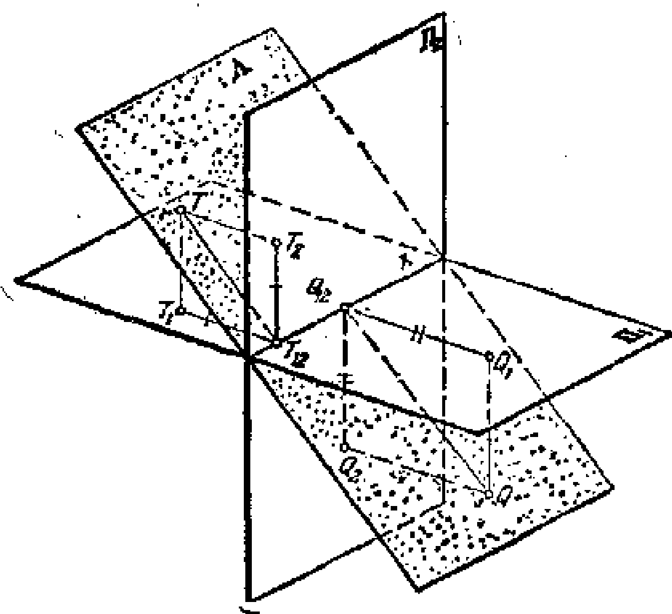


图 56

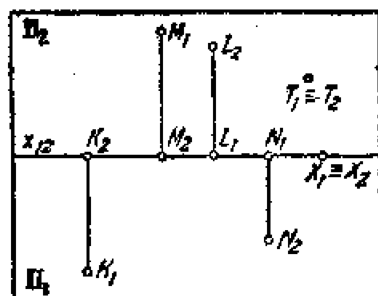


图 57

6. 应当注意某些特殊位置的点(参看图57)。位在水平投影面Π_1上的点K和M，它们的正面投影K_2和M_2落在轴x_{12}上。反之，如果点的水平投影位在轴上，则表示点本身(点L和N)是在正立投影面Π_2上。十分明显，轴x上所有的点X都是重合点，即$X_1=X_2=X$。

这样，借助复合图实现了空间点(A)与水平投影场和正面投影场的一对点(A_1, A_2)之间的一一对应，这时点A_1和A_2应当在一条连系线($A_1A_2\perp x_{12}$)上。

§2. 直线在复合图上的图象

1. 直线的投影，作为直线上所有的点投影的总和，是一直线(参看“绪论”)。过直线 l 作一水平投射面Σ和正面投射面Ω，我们就得到已知直线的水平投影 l_1 和正面投影 l_2($l_1=\Sigma\times\Pi_1$, $l_2=\Omega\times\Pi_2$)(图 58)。

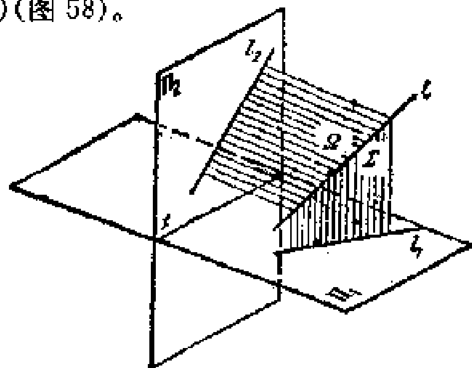


图 58

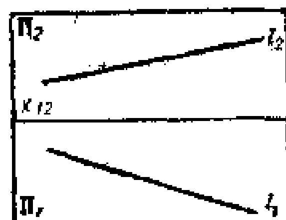


图 59

反之，每一对一般位置直线 $l_1\subset\Pi_1$ 和 $l_2\subset\Pi_2$ 在空间确定唯一的一条直线 l ①，它是过直线 l_1 和 l_2 所作的投射面的交线。

因此，空间直线在两面复合图上可用自己的一对投影(l_1, l_2)来确定(图 59)。

2. 但是，直线在平面上的投影不总是直线。投射线，也就是垂直于投影面的直线，在这个平面上投射为一个点。例如，观察水平投射线 f (图 60)。这条直线上所有的点投射到水平投影面

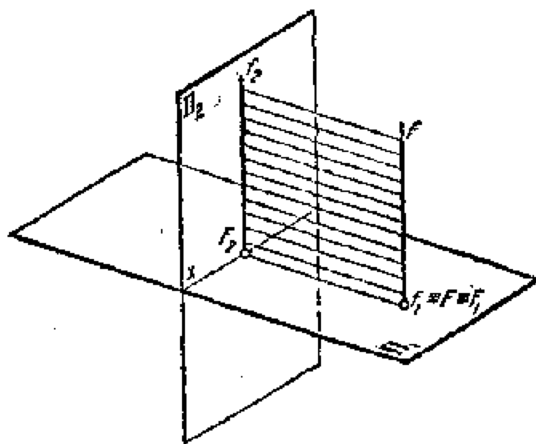


图 60

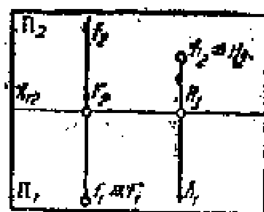


图 61

Π_1 上都成为同一个点F，即该直线的水平迹点② $f_1\equiv F_1$(图 61)。水平投射线 f 的正面投影显然是垂直于投影轴 x_{12} 的直线 f_2。同样，正面投射线 h 投射到水平投影面上成为垂直于轴 x_{12} 的直线h_1，而在正立投影面上则投射为一个点 $h_2\equiv H_2$($H_2=h\times\Pi_2$)。

3. **点和直线的从属性** 假设已知一直线 k (k_1, k_2)(图 62)。把直线 k 的投影看作是直线 k

---

① 下面所研究的情况(参看图 66 和 67)为例外。

② 直线与平面的交点称为直线在平面上的迹点。直线与投影面Π_1 和 Π_2的交点分别称为已知直线的水平迹点和正面迹点。

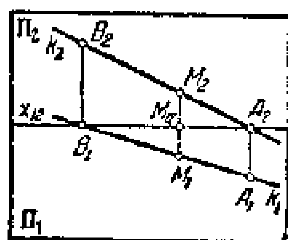


图 62

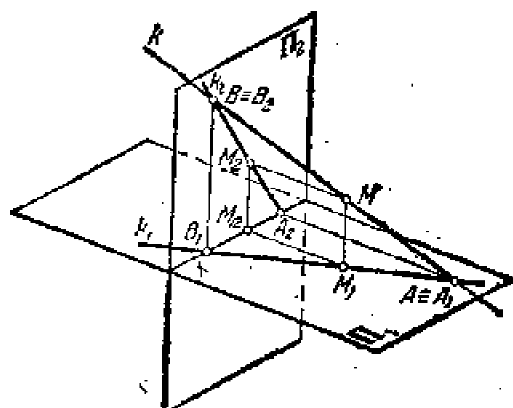


图 63

上所有点的投影的总和，我们看到，直线上所有的点的水平投影落在它的水平投影 k_1 上，而直线上所有的点的正面投影落在它的正面投影 k_2 上。因此，已知直线上的点显然可由它的一个投影来确定。例如，任取直线 k 上某一点M的水平投影$M_1(M_1\subset k_1)$。于是点$M\subset k$的第二个投影就是过M_1所引的连系线与直线 k 的正面投影k_2 的交点，即$M_2=M_1M_{12}\times k_2$。特别要提及直线 $k(k_1,k_2)$ 在投影面上的迹点的作法(图63)。用A表示直线 k 的水平迹点。点A的投影应当在直线的相应投影上：$A_1\subset k_1, A_2\subset k_2$。另一方面，点$A$属于平面$\Pi_1$，因此$A_2\subset x_{12}$。所以，在图上(参看图 62)点$A$可由它的正面投影$A_2=k_2\times x_{12}$ 和水平投影 A_1 来确定，而A_1可沿连系线在直线 k 的水平投影上找到。同样，为要作出直线 k 的正面迹点B，可先确定它的水平投影 $B_1=k_1\times x_{12}$，然后沿连系线找到所求的点的正面投影$(B_2=B_1B_1\times k_2)$。

4. 平行于投影面的直线称为等距线。平行于平面 Π_1 的直线称为水平线，而平行于平面 Π_2 的直线称为正平线。

水平线 h 的正面投影 h_2 平行于投影轴 x_{12}，因为过 h 所作的正面投射面平行于Π_1； 点$B(B_1, B_2)$是水平线的正面迹点。同时，我们看到，在水平投影上得到水平线 h 上的线段 AB 的实长，以及水平线 h 对正立投影面Π_2 的倾角φ：$A_1B_1=AB$；$(\widehat{h_1, x_{12}})=\varphi$ (图 64)。

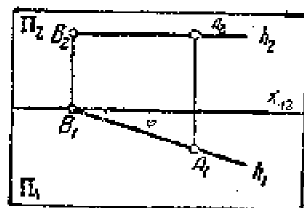


图 64

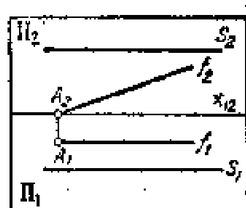


图 65

同样，正平线 f 的水平投影平行于投影轴：$f_1 /\!/ x_{12}$，点$A(A_1, A_2)$是正平线的水平迹点(图 65)。

平行于轴 x 的直线 s 平行于两个投影面，即它既是水平线$(s /\!/ \Pi_1)$，又是正平线$(s /\!/ \Pi_2)$。因此，直线 s 的两个投影都平行于投影轴：$s_1 /\!/ x_{12}, s_2 /\!/ x_{12}$。

前面已经指出，偶数等分面是重合平面，即它是正面投影与水平投影重合的点的轨迹。因此，这个平面上的每一条直线 l 在图上表现为一对重合的直线 $l_1 \equiv l_2$(图 66)。反之，图上每一对重合的直线 $l_1 \equiv l_2$ 确定了空间中位在偶数等分面上的一条直线 l。垂直于轴 x_{12} 的一对重合直线则是例外。每一对这样的直线 $p_1 \equiv p_2$ 在空间对应着无数直线，这些直线位在与轴 x_{12} 垂直的平面

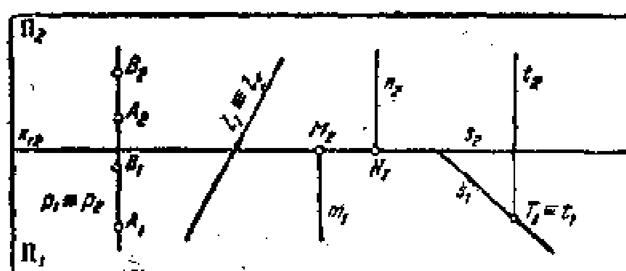


图 65

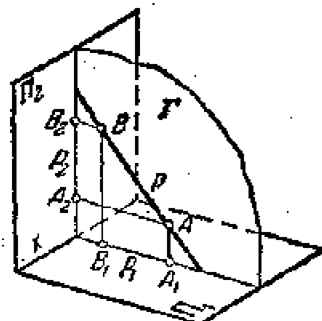


图 67

Γ 上，平面 Γ 称为侧平面，侧平面上的直线称为侧平线(图 67)。为了使垂直于轴 x_{12} 而在图上重合的一对直线能够确定空间唯一的一条侧平线，必须在直线的投影上给出一对点的投影[图 66和67上的点 A (A_1, A_2) 和 B (B_1, B_2)]。试观察一对垂直于轴 x_{12} 但不重合的直线 m 和 n(参看图 66)。直线 m_1 和 n_2 不可能是空间一条直线的水平投影和正面投影，因为通过它们所作的投射面是平行的。最后，观察一对直线 s_1 和 t_2，其中只有一条垂直于轴 x_{12} ($t_2 \perp x_{12}$)。过这两条直线分别作投射面，这两个投射面的交线确定了一条垂直于平面 Π_1 的直线 t。但水平投射线 t 的水平投影就是它的水平迹点(点 $T_1 \equiv t_1$)，这个点当然位在直线 s_1 上，可是对于直线 s_1 上所有其余的点，便无法沿连系线在直线 t_2 上找到对应的点。因此，投影成图 66 上直线 s_1 和 t_2 那样的直线，在空间是不存在的。

5. **两直线在空间的相对位置** 假定在空间有一对相交的直线 k 和 l。这对直线的交点用 A 来表示。则点 A 的投影显然应当位在已知直线 k 和 l 的同名投影上，即点 A_1 应当是两直线的水平投影的交点，而点 A_2 是两直线的正面投影的交点。因此，两相交直线的同名投影的交点位在一条连系线上(图 68)。反之，如果两条直线的同名投影的交点位在一条连系线上，则两直线相交。两条交叉直线 k 和 l 的同名投影的交点 A_1 和 B_2 不在一条连系线上(图 69)。事实上，如果点 A_1 和 B_2 位在一条连系线上，则直线 k 和 l 就变成相交的了。应当注意，直线 k 和 l 的水

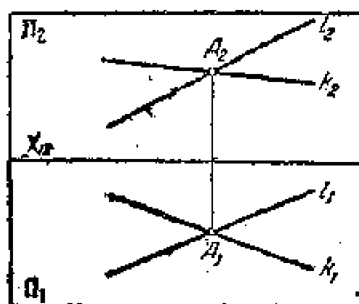


图 68

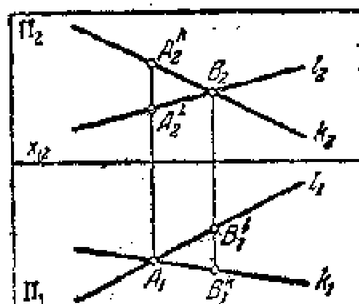


图 69

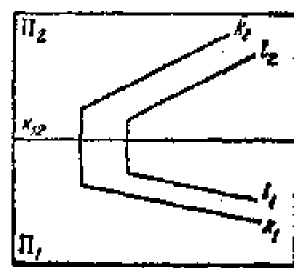


图 70

平投影的交点 $A_1(A_1=k_1\times l_1)$ 是位在已知交叉直线上的两个点的水平投影：$A^k(A_1, A_2^k)\subset k$ 和 $A^l(A_1, A_2^l)\subset l$。

同样，点 $B_2=k_2\times l_2$ 是点 $B^k(B_1^k, B_2)\subset k$ 和 $B^l(B_1^l, B_2)\subset l$ 的正面投影。至于平行的诸直线，由于它们的投射面互相平行，因而其同名投影也互相平行。反之，如果两直线的同名投影是平行的，则由它们所确定的直线也是平行的，只要它们不是侧平线（图 70）。侧平线的投影总是平行的（因为它们都垂直于轴 x_{12}）（图 71），即使直线本身不平行（图 72）。

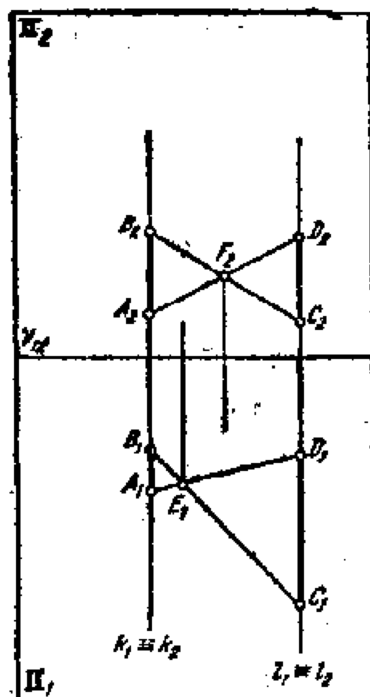


图 71

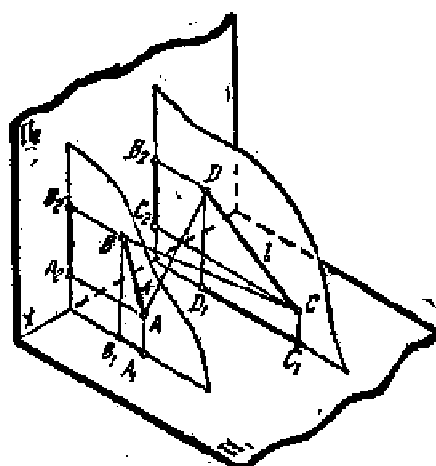


图 72

在复合图上可以用下述方法来确定两条侧平线的相对位置。如果两条侧平线 AB 和 CD 是平行的，则它们位在一个平面上，因此，直线 AD 和 BC 是相交的。如果这两条直线的交点 $E_1=A_1D_1\times B_1C_1$ 和 $F_2=A_2D_2\times B_2C_2$ 不在一条连系线上，则与它们对应的直线 AD 和 BC 是交叉的，因而，已知的侧平线 AB 和 CD 不平行（参看图 71 和 72）。

§3. 平面在复合图上的图象

1. 平面可由不在同一直线上的三个点来确定。我们用点 $A(A_1, A_2)$、$B(B_1, B_2)$ 和 $C(C_1, C_2)$ 给出一个平面（图 73 和 74）。为直观起见，用直线连接点 A、B 和 C，得到用三角形 $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ 给定的平面。

应当指出，给定平面上任意三个点的投影，在图上就唯一地确定这个平面上所有其余的点的投影，对于场 Π_1 的每一个点 M_1 可以找到场 Π_2 的这样一个唯一的点 M_2，使这一对点 (M_1, M_2) 在空间确定位在已知平面 ABC 上的一个点 M（参看图 74）。为此，必须通过已知其投影 M_1 的那个

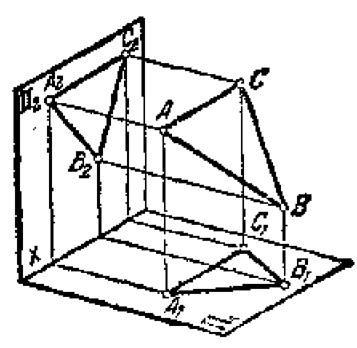


图 73

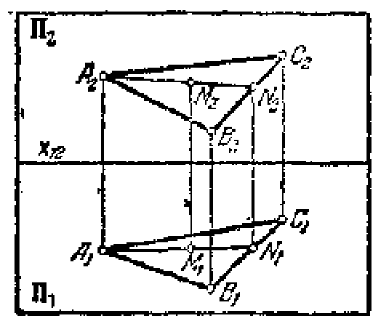


图 74

点M，作一条属于已知平面的任意直线，例如直线$AN(A_1N_1, A_2N_2)$①，然后沿连系线在投影A_2N_2上找出第二个投影M_2：$M_2=M_1M_2\times A_2N_2$。

2. **投射面** 试研究例如水平投射面$\Sigma(\Sigma\perp\Pi_1)$(图75)。平面Σ的水平投影Σ_1是直线，这条直线同时又是平面Σ的水平迹线(平面与水平投影面和正立投影面的交线，分别称为该平面的水平迹线和正面迹线)，而正面投影Σ_2则是点场。如果在平面Σ上有一条任意直线$l\equiv AB$

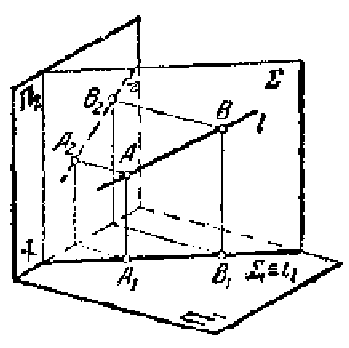


图 75

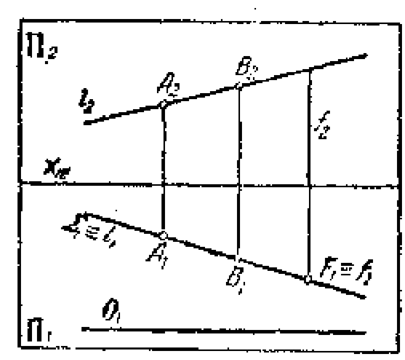


图 76

(图75和76)，它的水平投影也与平面的相应投影重合$\Sigma_1\equiv l_1$。正面投影l_2当然还是直线。因此，在水平投射面Σ的水平投影Σ_1上积聚着平面Σ上所有的点、所有的直线和所有的图形的水平投影。水平投射面由它本身的一个水平投影就可完全确定，因为通过平面Π_1上的直线Σ_1只能作唯一的一个垂直于平面Π_1的平面Σ。根据平面Σ上每一个点A的正面投影A_2可以确定这个点的水平投影A_1，因为大家知道，$A_1\subset\Sigma_1$；但应该记住，与上述相反，点$F\subset\Sigma$的水平投影F_1在空间确定的不是一个点F、而是整条直线f(水平投射线)。

这样，在复合图上，水平投射面不能建立点场Π_1和Π_2之间的一一对应；对于正面投射面，情况也是如此。

应当指出，投影面Π_1和Π_2也是投射面。平面Π_2是水平投射面(它的水平投影就是轴x_{12})；

① 在图74上，点N_1由直线A_1M_1和B_1C_1的交点($N_1=A_1M_1\times B_1C_1$)确定，然后沿连系线在直线B_2C_2上找出点N_2($N_2=N_1N_2\times B_2C_2$)。

而平面Π_1则是正面投射面(它的正面投影也是轴x_{12})。因此,在复合图上两个投影面由一条直线(轴x_{12})所确定。

3. 投射面在实践上有很大用处,其中等距面起着重要作用。平行于任一投影面的平面称为等距面,因为在它上面的点到该投影面的距离都相等。平行于水平投影面的平面称为水平等距面,而平行于正立投影面的平面称为正面等距面。正面等距面Θ的水平投影Θ_1平行于轴x_{12},因为$\Theta \parallel \Pi_2$(参看图76)。同样,水平等距面的正面投影也平行于轴x_{12}。

总之,等距面在复合图上表现为平行于轴x_{12}的直线。特别是,投影面本身可看作是距离投影面为"零"的等距面。

上面讨论过的等距线(水平线和正平线)位在由它们确定的相应的等距面上。因而,反过来说,等距线可以定义为位在等距面上的直线。显然,这时位在等距面上的任意图形的所有尺寸在相应的投影面上投射为实际大小。

4. 例 平面ABC由三个点的投影给定(图77)。试通过其中一个点(例如A)作位在该平面上的水平线和正平线。

水平线的正面投影平行于投影轴。因此,过点A_2引直线$h_2 \parallel x_{12}$。水平线h位在平面ABC上,所以h交BC于点L:$(L_2=B_2C_2\times h_2)$,$(L_1=B_1C_1\times L_2L_1)$。这样,$h(h_1, h_2)$就是平面$ABC$上过点$A$所作的水平线。同理,可作出平面$ABC$上过点$A$的正平线$f(f_1, f_2)$。

显然,过平面上每一个点都可作出位在这个平面上的一条水平线和一条正平线。

上面我们讨论了用三个点(或者,用一个三角形薄板也一样)给定平面的一般情况。如果不全画出三角形薄板的三条边,而只画出两条边,那么,这种用两相交直线(在特殊情况下是两平行直线)给定平面的方法也是常常采用的,而且这时也总可以转化为用三个点来给定(可在一直线上取两点,而第三点则取在另一直线上)。

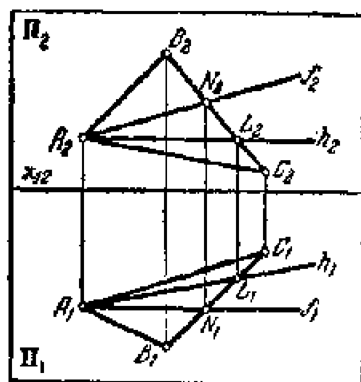


图 77

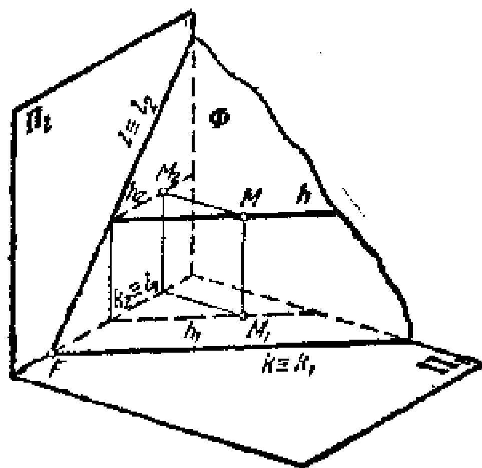


图 78

5. 更加特殊的是用迹线(平面与投影面的交线)给定平面。设$k=\Phi\times\Pi_1$和$l=\Phi\times\Pi_2$是平面Φ的迹线,而$F=\Phi\times x$是平面Φ与轴x的交点(图78)。同时属于两个投影面的点F,显然应当位在平面Φ的两条迹线上。因此,平面Φ的两条迹线相交于轴上:$k\times l=F$, $F\subset x$。要用迹线给定平面,只要给出水平迹线的水平投影和正面迹线的正面投影就够了,因为迹线的另一

个投影与轴 x_{12} 重合(图 79)。平面 Φ 上的点 M 的投影可象上述那样(参看图 79 和 74)用平面 Φ 上过点 M 的任意直线 AN 作出。应当指出,在用迹线给定平面时,常选该平面的一条等距线作为辅助线 AN。这时要注意,水平线的水平投影总平行于该水平线所在的平面的水平迹线($h_1 \parallel k_1$),因为 $h \parallel k$(参看图 78)。同样,正平线的正面投影平行于平面的正面迹线($f_2 \parallel l_2$)。过平面 Φ 的

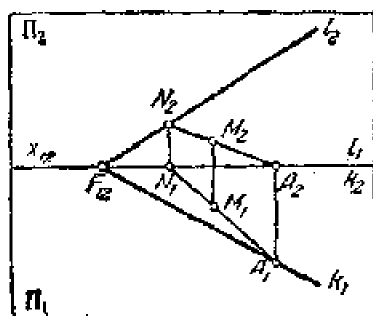


图 79

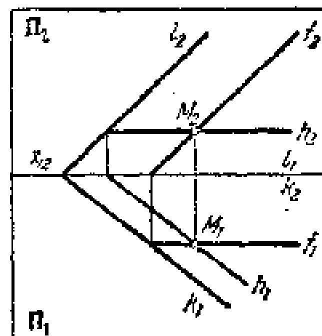


图 80

点 M 作这个平面的水平线 h 和正平线 f 的方法如图 80 所示。

§4. 投影场 Π_1 和 Π_2 间由给定平面所确定的亲似对应

1. 讨论复合图时已指出了在投影场 Π_1 和 Π_2 之间存在着某种对应:空间任意一点 A 的两个投影 A_1 和 A_2 一定位在一条连系线上,也就是说,连接一个点的两个投影的直线必垂直于投影轴。但这个对应不是一一对应,设 A_1 是第一个场的点,则在点 A_1 的连系线上存在有场 Π_2 的无限多个点,例如点 A_2^1、A_2^2、A_2^3 等(图 81)。同样,场 Π_2 的每一个点 B_2 对应于场 Π_1 的无限多个点,因为场 Π_1 的每个点 A_1 在空间对应于位在水平投射线 f 上的无限多个点,而场 Π_2 的每个点 B_2 在空间对应于正面投射线 h 上的无限多个点。

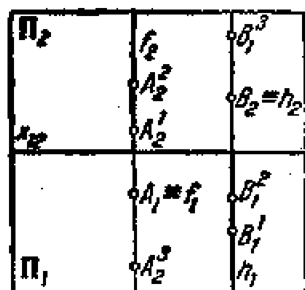


图 81

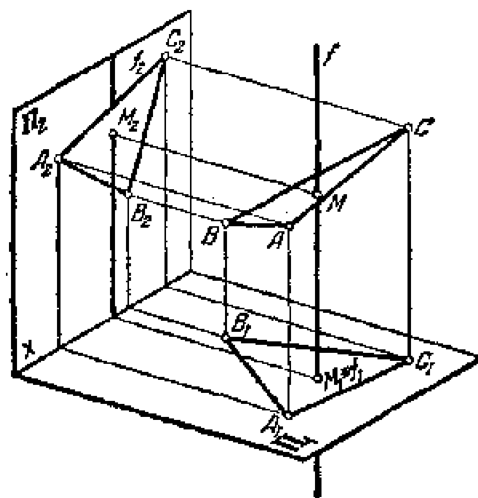


图 82

如果从空间所有的点中分出那些同在一个平面上的点,这些点的投影场之间便建立起一一对应(图 82)。这时,连接对应点的连系线是平行的,所以这个对应是亲似对应,因为它显然具备了亲似对应的所有特征①。

① 参看第一章 §3。

总之，在空间给定一个一般位置平面，我们就在图上建立起位在该平面上的点的正面投影场和水平投影场之间的亲似对应①。

2. 设 (A_1, A_2)、(B_1, B_2) 和 (C_1, C_2) 是在图面上建立起亲似对应的三对点(图 83)。这时，亲似轴(亲似对应的二重点的轨迹)由对应直线的交点确定：$K_{12}=A_1B_1\times A_2B_2$，$L_{12}=B_1C_1\times B_2C_2$。另外的一对亲似直线也相交于亲似轴 $s_{12}\equiv K_{12}L_{12}$②。

亲似轴 s_{12} 上每一个点 M_{12} 都是二重点 $(M_1\equiv M_2)$。另一方面，前面已经阐明，偶数等分面 Λ 是空间重合点的轨迹。因此，平面 ABC 与等分面 Λ 的交线，即平面 ABC 的重合直线，在图上表现为亲似轴 s_{12}。这样，在图上由平面 ABC 建立的亲似对应的轴是平面上重合直线的重合投影。

3. 其次，应当指出，空间每个平面(投射面除外)在复合图上建立起与该平面相应的、并以二重点的轨迹作为亲似轴的亲似对应。同时与等分面 Λ 相交于同一直线的各平面，在图上将建立起具有公共亲似轴的不同的亲似对应。特别是，通过轴 x 的各平面都以轴 x 作为它们的重合直线。反之，如果由某个平面建立的亲似对应的轴 s_{12} 与轴 x_{12} 重合，则这个平面通过轴 x。应当指出，由奇数等分面(位在第 I 和第 III 象限)建立的亲似对应是对称的。偶数等分面本身在图上建立全等对应。

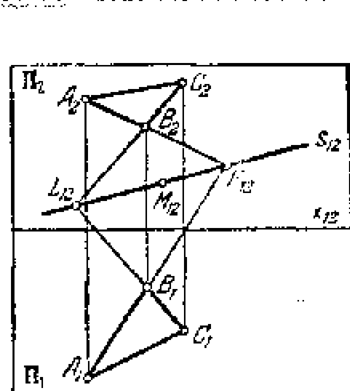


图 83

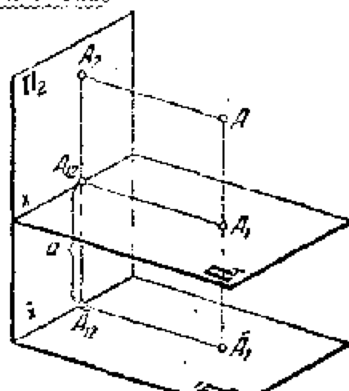


图 84

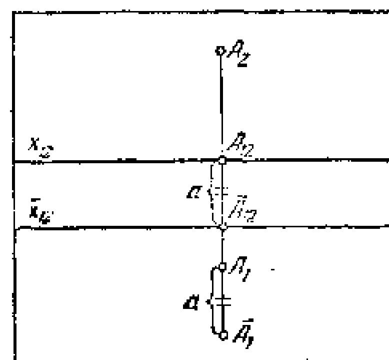


图 85

§ 5. 投影面的平行移动

1. 设 (A_1, A_2) 是点 A 在具有轴 x 的正交投影面体系 (Π_1, Π_2) 中的一对投影(图 84 和 85)。将水平投影面平行于其本身从位置 Π_1 移到位置 $\overline{\Pi}_1$，这时点 A 的高度增加了 $\bar{A}_1A_1=\bar{A}_{12}A_{12}=a$，而点 A 的深度则不变：$\bar{A}_{12}\bar{A}_1=A_{12}A_1$。在图上，轴 x_{12} 平行于其本身移动了一段距离 a。

反之，如果保持平面 Π_1 的位置不变，平行移动平面 Π_2 一段距离 a，则点 A 的深度改变同一距离 a。

2. 其次，平行移动两个投影面，并且使轴 x 沿着偶数等分面 Λ 移动。这样，当水平投影面向下移动一段 a 时，正立投影面则向前移动同一段 a(图 86)。这时，点 A 的高度显然增加了 $a(\bar{A}_{12}\bar{A}_2=A_{12}A_2+a)$，而点 A 的深度则减少了同一值 $a(\bar{A}_{12}\bar{A}_1=A_{12}A_1-a)$。结果轴 x_{12} 在图上占有新位置 $\bar{x}_{12}\parallel x_{12}$，而点 A 的投影 A_1 和 A_2 之间的距离没有改变(图 87)。

因此，如果投影面平行移动时轴 x 沿着等分面 Λ 移动，在复合图上的形体的点的水平投影和正面投影之间的距离不会改变。投影轴 x_{12} 在图上平行于其本身移动任意一距离只不过意味着两个投影面在空间平行移动，这时投影轴 x 沿着等分面 Λ 移动。

3. 如果将平面 Π_1 和 Π_2 各平行地移动任意距离，则点 A 的高度和深度将改变不同的大小，因而它们的和成为变量，也就是说，这时点 A 的水平投影和正面投影之间的距离发生变化。不过，投影面平行移动时，形体的

---

① 其中投射面是例外，因为它们的投影场之间不存在一一对应(有一个场退化为直线上的点)。

② 参看第一章。

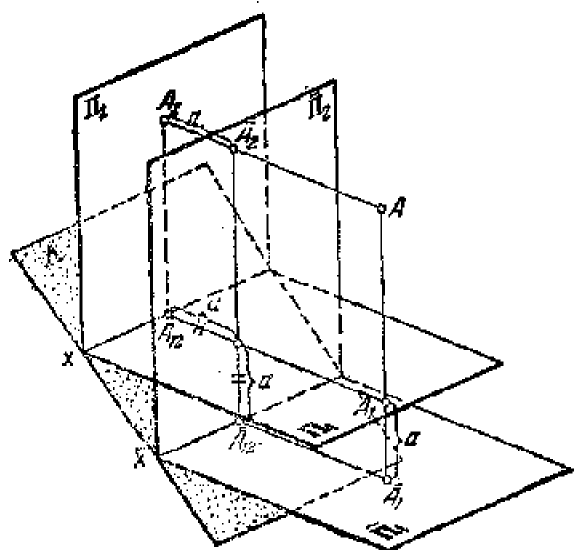


图 86

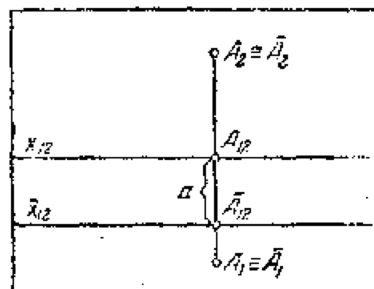


图 87

投影本身是不变的，因此在复合图上，没有必要指明轴 x_{12} 的位置，也就是没有必要事前指定投影面 Π_1 和 Π_2 在空间的位置，工程上用的图就是这样。

4. 举例分析基本度量问题的解法——在无轴复合图上确定直线段的长度。设线段 AB 由两个投影 A_1B_1 和 A_2B_2 给出(图 88)。于是，线段 AB 的长度可作为直角三角形 AB^*B(图 89) 的斜边而不难作出，该三角形的一直角边等于线段 AB 的水平投影($AB^*=A_1B_1$)，而另一直角边等于线段 AB 两端点的高度差($B^*B=B_1B-A_1A=B_2^*B_2$)。因此，以水平投影 A_1B_1 为一直角边作直角三角形 $A_1B_1\bar{B}$(参看图 88)，它的第二直角边可在正面投影上求出，即等于点 B 对过点 A 所作水平等距面的超越度：$B_1\bar{B}=B_2^*B_2$。这个三角形的斜边 $A_1\bar{B}$ 显然就等于已知线段 AB 的长度：$A_1\bar{B}=AB$。同时，所得到的 $\angle B_1A_1\bar{B}=\varphi$ 显然确定了直线 AB 对平面 Π_1 的倾角的实际大小：$\varphi=\angle B^*AB$。

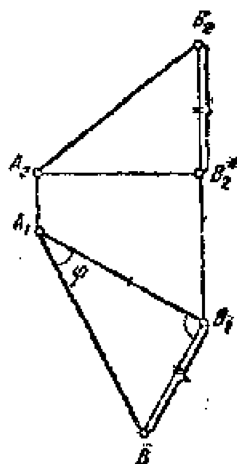


图 88

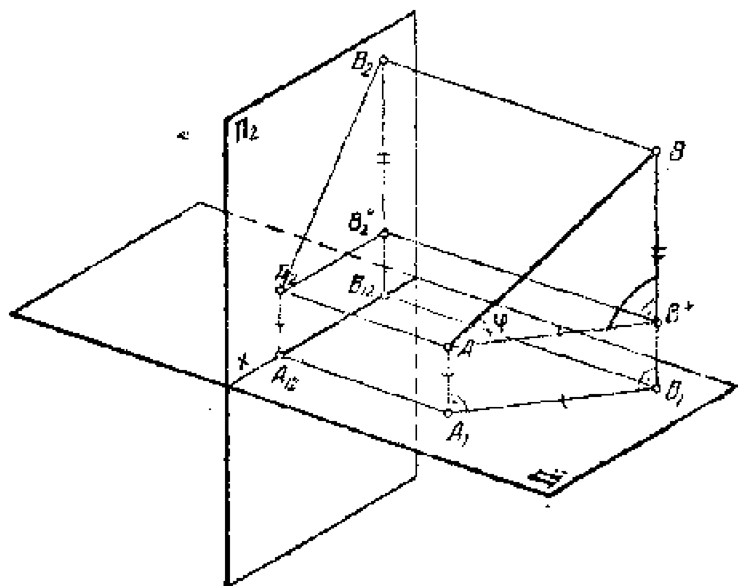


图 89

§6. 三个正投影组成的复合图

1. **直角三面形** 两面图是度量确定图，也就是说，它完全确定所画形体的形状和大小以及它在空间的位置。可是，由于空间形体是三维的，如果除了两个基本投影之外，再给出它在第三个平面上的投影，则它的图象就会更明确。通常用侧立投影面Π_3作为这种投影面（图 90）。$\Pi_3 \perp x$，因此，$\Pi_3 \perp \Pi_1$ 和 $\Pi_3 \perp \Pi_2$。三个投影面(Π_1、Π_2、Π_3)在空间构成直角三面形，即构成三个互相垂直的平面体系。这个三面形的棱边用 x、y、z 来表示。

2. **三面图** 设 A 是空间的某一个点。为了确定点 A 对平面体系(Π_1、Π_2、Π_3)的位置，过点 A 向投影面作垂线：$AA_i \perp$ 平面Π_i($i=1$、2、3)。这些垂线的垂足（点 A_1、A_2、A_3）就分别是点 A 在投影面体系(Π_1、Π_2、Π_3)中的水平投影、正面投影和侧面投影(参看图 90)。同时注意到，投射面 AA_1A_2、AA_1A_3 和 AA_2A_3 分别垂直于轴 x、y 和 z。用 A_{12}、A_{13} 和 A_{23} 表示这些平面与投影轴的交点，我们看出，直线 A_1A_{12} 和 $A_{12}A_2$ 垂直于轴 x，另外两对直线 A_1A_{13}、$A_{13}A_3$ 和A_2A_{23}、$A_{23}A_3$ 也一定同样分别垂直于轴 y 和 z。点 A 到水平投影面 Π_1 的距离我们前面已称为点 A 的高度，点 A 到正立投影面 Π_2 的距离已称为点 A 的深度；点 A 到侧立投影面 Π_3 的距离现在称为点 A 的宽度。于是：$A_1A=A_{13}A_2=A_{13}A_3$——点 A 的高度；$A_2A=A_{12}A_1=A_{23}A_3$——点 A 的深度；$A_3A=A_{23}A_2=A_{13}A_1$——点 A 的宽度。

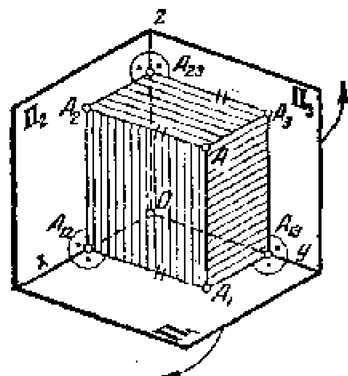


图 90

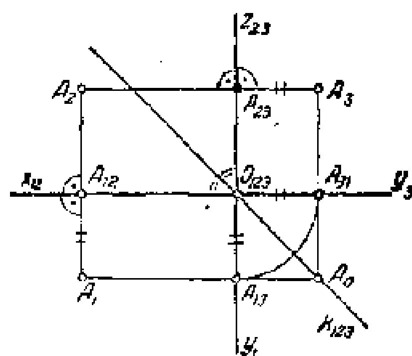


图 91

在作平面的图时，认为平面 Π_2 是不动的，其余的平面 Π_1 和 Π_3 则分别绕轴 x 和 z 按图 90 箭头所指的方向转到与 Π_2 重叠。平面 Π_1 与正立投影面 Π_2 重叠后，线段 $A_1A_{12} \perp x_{12}$ 和线段 $A_{12}A_2 \perp x_{12}$ 就在一条直线上(图 91)。同样，平面 Π_3 与平面 Π_2 重叠后，线段 $A_2A_{23} \perp z_{23}$ 和线段 $A_{23}A_3 \perp z_{23}$ 位在连系线 $A_2A_3 \perp z_{23}$ 上。

投影面重叠的结果，得到点 A 的三个正投影的复合图。这时，连系线必须垂直于轴：$A_1A_2 \perp x_{12}$、$A_2A_3 \perp z_{23}$，而线段 $A_{12}A_1$ 和 $A_{23}A_3$ 相等，因为$A_{12}A_1=A_{23}A_3=A_2A$ 是点 A 的深度(参看图 90)。

试研究怎么样的连系线才能连接点 A 的水平投影和侧面投影。为此，注意正方形 $A_{13}O_{123}A_{31}A_0$(参看图91)。这个正方形的对角线是角$(\widehat{x_{12}, z_{23}})$的等分线。因此，连接投影$A_1$ 和A_3 的连系线是由两段线(水平的和铅直的)组成的折线，折线的顶点在角$(\widehat{x_{13}, z_{23}})$的等分线 k_{123} 上。今后将称这条折线为水平-铅直连系线。这条折线的一部分有时用圆弧代替。这样，三面图上的连系线

可由下列的连系线组成(图 92)：A_1A_2——铅直连系线；A_2A_3——水平连系线；A_1A_3——水平-铅直连系线；同时，角等分线 k_{123} 是连系折线的顶点的轨迹。应该说明，给出任意一点的三个投影，例如点 A (A_1, A_2, A_3)，直线 k_{123} 就被确定，因此，它是复合图上的固定直线。

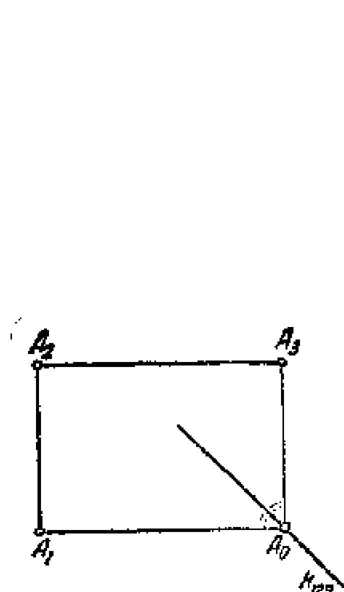


图 92

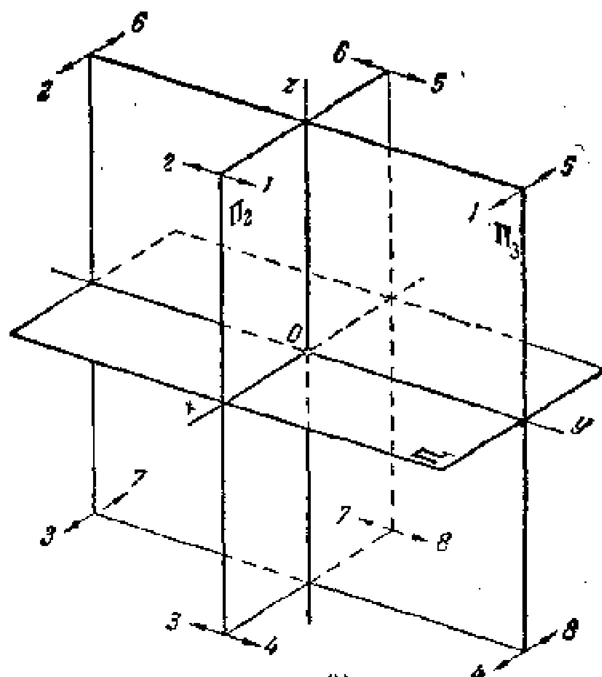


图 93

3. 卦限 上面引入的三投影面体系(Π_1, Π_2, Π_3)把整个空间划分为八个部分，每一部分称为卦限。给卦限编号如下(图 93)：在侧立投影面左边的卦限保留象限的号码，而在平面 Π_3 右边的，则按下列编号：5、6、7 和 8。当投影面重叠时，水平投影面的前面部分转到下面，而后面部分则转向上方，侧立投影面的前面部分向右边转离我们，而后面部分则从左边转向我们。记得我们曾把空间所有点的水平投影的集合称为水平投影场 Π_1(形体的相应投影称为俯视图)，而空间所有点的正面投影的集合称为正面投影场 Π_2(形体的相应投影称为前视图或主视图)。同样，空间所有点的侧面投影的集合现在称为侧面投影场 Π_3(形体的相应投影称为左视图)。当投影面重叠时，三个投影场都位在正立投影面 Π_2 上。但是，投影场的重合并不意味着空间每一个点的三个投影全部重合。只有唯一的一条直线，它的点的投影会全部重合(参看本章 § 7)。

4. 现在来讲述投影场按卦限配置的问题。显然，对于第 I 卦限，投影场的配置如图 94，a 所示。

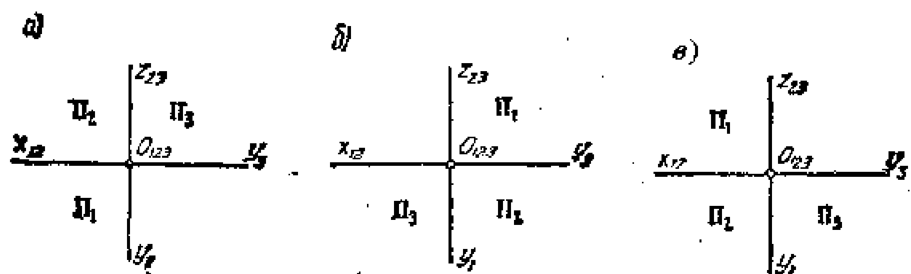


图 94

由于第Ⅰ卦限的各投影场与第Ⅶ卦限的各投影场分别处于对顶角的位置，在图上用相应的对顶角位置的场代替第Ⅰ卦限的每一个投影场，就可得到第Ⅶ卦限的各个场的位置。

这种投影配置法主要在美洲国家采用(图 94, б)，所以称为美洲的投影配置法。而在多数的欧洲国家，其中包括苏联，则采用图 94, а 所示的投影配置法(欧洲的投影配置法)。有时，美洲的体系还采用图 94, в 所示的方法，这种方法是将图 94, б 所示的投影配置对铅直的投影轴作镜面映射得到的。

5. **空间直角坐标系** 试研究由投影面体系(Π_1, Π_2, Π_3)构成的三面形。在轴 x、y、z 上定出度量单位 e，并取三个投影面的交点(三面形的顶点)O 为读数的起点。如图 95 所示，确定每条轴的正方向。这时，三面形 $Oxyz$ 可看作是笛卡儿直角坐标系，它具有坐标轴：Ox——横轴，Oy——纵轴，Oz——竖轴；和坐标面：$xOy \equiv \Pi_1$，$xOz \equiv \Pi_2$，$yOz \equiv \Pi_3$。

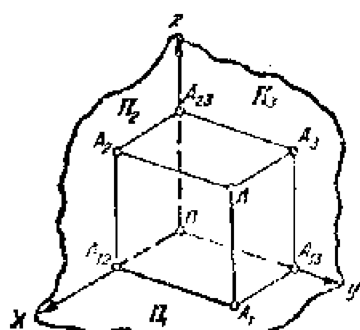


图 95

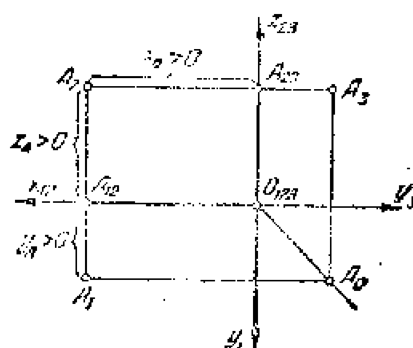


图 96

确定点 A 对坐标系 $Oxyz$ 的位置的折线 $OA_{12}A_1A$ 称为坐标折线。这条折线的每一段称为坐标线段：OA_{12}——点 A 的横坐标线段，$A_{12}A_1$——点 A 的纵坐标线段，A_1A——点 A 的竖坐标线段。

用上面定出的单位长度 e 来度量点 A 的坐标线段，其长度称为点 A 的坐标：$x_A=\frac{OA_{12}}{e}$——点 A 的横坐标，$y_A=\frac{A_{12}A_1}{e}$——点 A 的纵坐标，$z_A=\frac{A_1A}{e}$——点 A 的竖坐标。

应当指出，点 A 的坐标可以看作是点 A 到坐标面的距离。于是点 A 的坐标将具有如下的意义：z_A——点 A 的高度，y_A——点 A 的深度，x_A——点 A 的宽度。将点 A 正投射到坐标轴上，也可得到坐标线段 OA_{12}、$OA_{13}=A_{12}A_1$ 和 $OA_{23}=A_1A$。

根据已知坐标 x_A、y_A、z_A 作点 $A(x_A, y_A, z_A)$ 时，步骤如下：利用单位长度 e，作出线段 OA_{12}，再作平行于 y 轴的线段 $A_{12}A_1$，最后则作平行于轴 z 的线段 A_1A。结果，我们就得到点 $A(x_A, y_A, z_A)$。

点 A 不是只可以在第Ⅰ卦限内。为了确定任何卦限内的点的位置，我们规定坐标的符号。坐标轴所取的正方向对应于第Ⅰ卦限(图 96)。

§7. 三面复合图上投影轴的选择

1. 在工程上所应用的图中，投影轴通常不表示出来。这就是说，投影面可平行于本身移动。但是，即使图上没有投影轴，也总能够根据一个点的两个已知投影定出它的第三个投影，只要在图上已经有了另一个点的三个投影。这可借助图上的固定直线 k 来解决，这条直线就是连系折线的夹角等分线(图 97)。例如，已知点A的三个投影的位置。图上的固定直线 k_{123} 就可作为角 $A_1A_0A_3$ 的等分线而定出。结果所有的连系线都完全可以确定，而且根据一个点的每两个投影就能作出它的第三个投影。图 97 上的点 B 就是这样作出的。

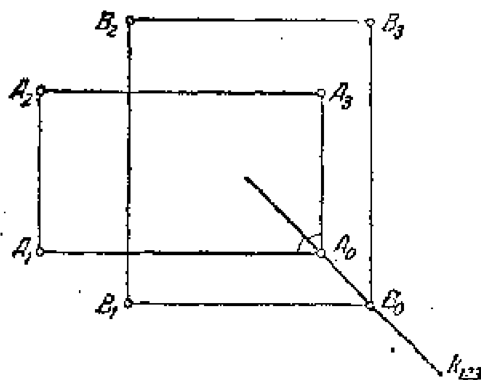


图 97

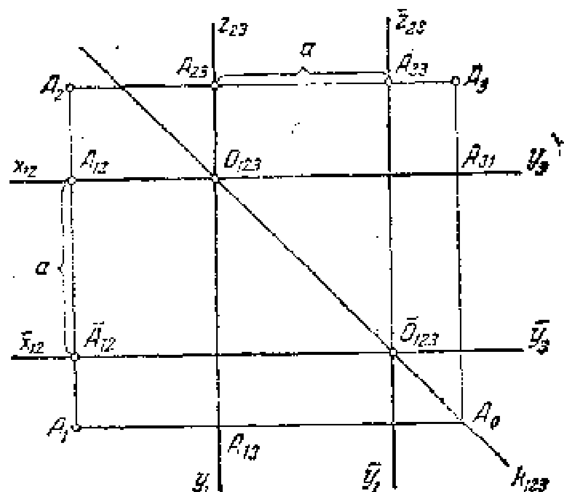


图 98

总之，在图上给出了一个点的三个投影，就唯一地确定了各条连系线。

应当指出，如果需要的话，也可以确定投影轴的位置。这时可以任意选定一条投影轴，例如水平轴 x_{12}，只要考虑到使它垂直于连系线 A_1A_2(图 98)；第二条投影轴也就由此而确定，为此，必须在连系线 A_2A_3 上自点 A_3 起截取等于点 A 的深度的线段 A_3A_{23} ($A_{23}A_3 = A_{12}A_1$)，再过点 A_{23} 作轴 $z_{23} \perp A_2A_3$。这时，因为距离 $A_{12}A_1$ 与 $A_{23}A_3$ 相等，所以矩形 $A_{13}O_{123}A_{31}A_0$ 是正方形，它的对角线 $O_{123}A_0$ 就是点 A_1 和 A_3 的连系折线的夹角 $A_1A_0A_3$ 的等分线。这样，不管轴 x_{12} 是怎样作出的，点 $O_{123} = x_{12} \times z_{23}$ 总应当位在固定直线 k_{123} 上。因此，任意作出轴 $x_{12} \perp A_1A_2$ 后，作第二条投影轴就很简单，因为它是过点 $O_{123} = x_{12} \times k_{123}$ 并垂直于轴 x_{12} 的直线 z_{23}。

然后，将所作出的轴 x_{12} 和 z_{23} 平行地移动到新的位置 $\bar{x}_{12}$ 和 $\bar{z}_{23}$，使坐标原点 $\bar{O}_{123}$ 仍然在固定直线 k_{123} 上(参看图 98)。这时，点 A 的深度减少了线段 $a = A_{12}\bar{A}_{12}$ ($\bar{A}_{12}A_1 = A_{12}A_1 - a$)，而点 A 的高度则增加同一量 a ($\bar{A}_{12}A_2 = A_{12}A_2 + a$)。结果，点 A 在投影面体系(Π_1, Π_2, Π_3)中的水平投影和正面投影之间的距离等于点 A 在新投影面体系($\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \bar{\Pi}_3$)中相应的投影之间的距离。同样，点 A 的正面投影和侧面投影之间的距离也没有改变。

因此，在复合图上可以使坐标原点 O_{123} 沿着固定直线 k_{123} 移动来平行移动投影轴 x_{12} 和 z_{23}。

2. 重合平面 Λ① 是在两投影面体系(Π_1, Π_2)中的空间重合点的轨迹。对于第三个投影面 Π_3 来说，平面 Λ 显然是投射面(平面 Λ 垂直于平面 Π_3，因为它通过垂直于平面 Π_3 的直线 x)(图 99)。因此，所讨论的平面是侧面投射面 $\Lambda(\Lambda_3)$，而它在平面 Π_3 上的投影就是直线 $\Lambda_3 = \Lambda \times \Pi_3$。因为平面 Λ 等分平面 Π_1 和 Π_2 间的两面角并位在第 II 和第 IV 象限内，所以位在平面 Π_3 上的直线 Λ_3 就是轴 y 的正方向和轴 z 的负方向所夹的坐标角的等分线。

投影面 Π_3 与平面 Π_2 重叠后，在图上直线 Λ_3 就与固定直线 k_{123} 重合($\Lambda_3 \equiv k_{123}$)。因此，固定直线 k_{123} 是平面 Λ 的侧面投影 Λ_3。

---

① 参看第二章§1之6。

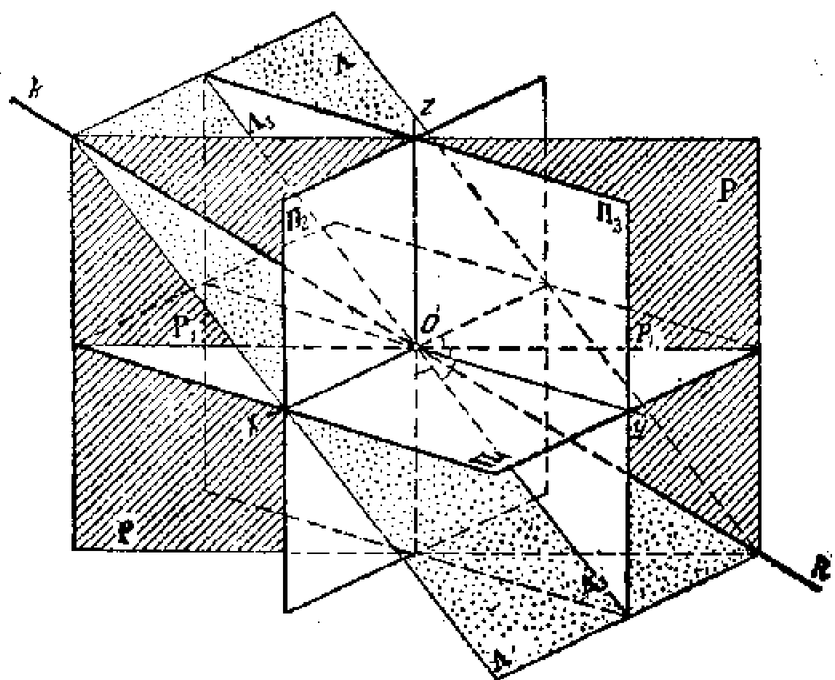


图 99

同样，等分投影面 Π_2 和 Π_3 间的两面角并且通过第 V 和第 II 卦限的平面 P，在体系 (Π_2, Π_3) 中显然是重合平面(参看图 99)。其次，应该注意，因为平面 P 通过垂直于水平投影面的直线 z，所以平面 P 垂直于平面 Π_1 $(P \perp \Pi_1)$，即所讨论的平面 P 是水平投射面 $P(P_1)$。平面 P 的水平投影 P_1 是轴 y 的正方向与轴 x 的负方向所夹的坐标角的等分线，它在三面复合图上表现为固定直线 k_{123} $(P_1 \equiv k_{123})$。

3. 应当指出，与刚才研究过的情况不同，并不存在这样的平面，它的每一个点在投影场 Π_1 和 Π_3 上会有重合的投影。但这不是说，在投影面 Π_1 和 Π_3 体系中没有重合点。这种重合点是存在的。为此，我们来看一看重合平面 A 和 P 的交线 k：$(k = A \times P)$ (参看图 99)。直线 k 是平面 A 上的直线，它在投影面体系 (Π_1, Π_2) 中是重合直线。另一方面，直线 k 是平面 P 上的直线，它在投影面体系 (Π_2, Π_3) 中也是重合直线。因此，在图上直线 k 的三个投影 k_1、k_2 和 k_3 都重合。这条直线的重合投影 $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k_{123}$ 在我们的三面图上表现为固定直线①。

§8. 基本的定位问题

1. 所谓定位问题是指求作不同的几何图形的公共元素问题。属于这类问题的有从属性问题(在线上或面上取点，在面上取线，过已知线作面等)和各种几何形体的相交问题(求线与面的交点或两面的交线等)。有些定位问题前面已经研究过了。例如，怎样在直线或平面上取点，怎样确定位在同一平面上的两条直线的交点，等等。在解定位问题时，图形的度量性，即只有经过度量才能显示出来的特性，不用考虑。

我们来研究两个基本的定位问题：1) 确定直线与平面的交点和2)确定两平面的交线。我们将在随便一对投影场中解这些问题。为此，经常选择 (Π_1, Π_2) 这一对场来解题。非必要时将不指明投影轴。

---

① 直线 k 称为平面体系 (Π_1, Π_2, Π_3) 中的空间"k-直线"。

2. 为了解所提出的问题，必须先研究两个辅助问题，即确定一般位置直线或一般位置平面与投射面的公共元素的问题。

问题1 试确定直线与投射面的交点。

假定，已知水平投射面$\Sigma(\Sigma_1)$和一般位置直线$a(a_1, a_2)$(图 100)。用字母M表示所求的平面Σ与直线a的交点。那么，点M的水平投影M_1显然应当既位在平面Σ的水平投影Σ_1上，又位在直线a的水平投影a_1上。因此，点M的水平投影可作为平面Σ的水平投影Σ_1与直线a的水平

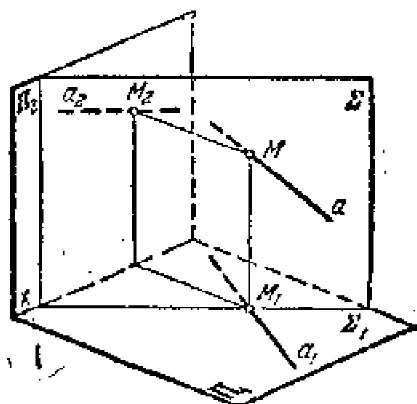


图 100

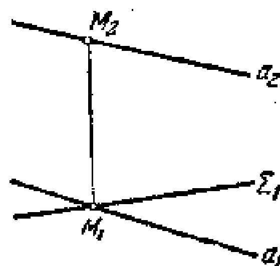


图 101

投影a_1的交点而求出(图 101)。点M的正面投影M_2则沿连系线在直线a的正面投影a_2上找到。

确定直线在等距面，特别是投影面上的迹点①，是刚才所研究的问题的一种特殊情况。

问题2 试确定一般位置平面与投射面的交线。

假定，一般位置平面用最一般的形式给定，即用三个点给定。为了解题清楚而方便，采用三

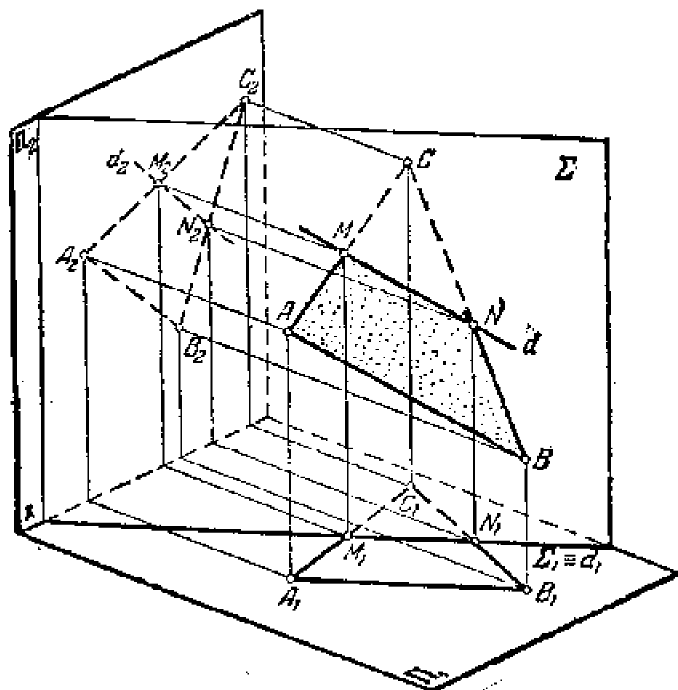


图 102

① 参看第二章§2之3。

角形 $ABC(A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2)$的形式来表示这个平面。取水平投射面 $\Sigma(\Sigma_1)$作为已知的投射面(图 102)。为了求出平面 ABC 与 Σ 的交线，必须求出这两个已知平面上的两个公共点。例如，找出平面Σ与三角形 ABC 的任意两条边的交点。分别用字母M和N来表示平面 $\Sigma(\Sigma_1)$与直线AC和BC的交点：($M=\Sigma\times AC$, $N=\Sigma\times BC$)。应用问题 1 所述的作图法，找出点 $M(M_1, M_2)$ 和 $N(N_1, N_2)$ (图 103)。用直线将这两个点的同名投影连接起来，即得到所求的两已知平面的交线$MN(M_1N_1, M_2N_2)$ 的投影。应该注意，所得直线 $MN\equiv d$ 的水平投影与平面 $\Sigma(\Sigma_1)$ 的水平投影重合，而直线 d 的正面投影 d_2则由点M和N的正面投影确定。

3. 刚才研究过的两个问题，使有可能解决两个基本的定位问题。

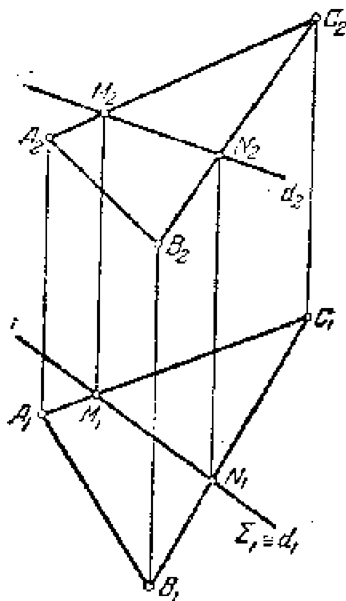


图 103

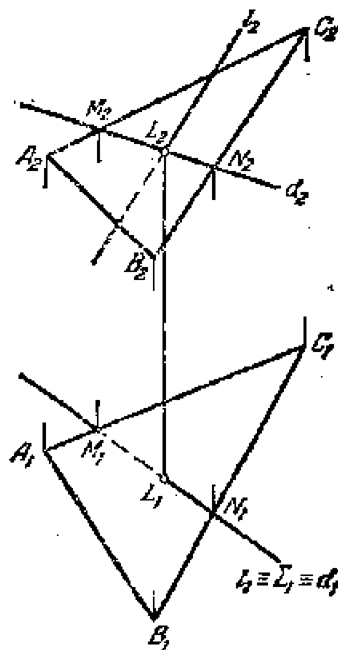


图 104

问题1 作直线与平面的交点。

设有一般位置平面 ABC 和直线 l(图 104)。直线 l 与平面 ABC 的交点的求法，完全可用上述问题的解法作为基础，即包含已知直线 l 作投射面 Σ，求出平面 ABC 与投射面的交线 d，并确定所得直线 d 与已知直线 l 的交点 L。点 L即为所求，因为它既属于直线 l，又作为位在平面 ABC 上一直线 d 的点而属于已知平面 ABC：$L=l\times ABC$。因此，在复合图上可作图如下。包含已知直线 l 作投射面，例如作水平投射面 $\Sigma(\Sigma_1)$。于是，直线 l 的水平投影与平面Σ的水平投影重合($l_1\equiv\Sigma_1$)。用前题所述的方法找出平面Σ与平面ABC的交线 $d(d_1, d_2)$。位在同一平面 Σ 上的直线 l 与 d 相交于点L：($L_2=l_2\times d_2$)，而 L_1 则沿连系线在直线 l_1 上找到①。因此，作出的点 L即为所求②。

---

① 如果点L是无穷远点($l_2 /\!/ d_2$)，则意味着直线 l 平行于平面 ABC。

② 直线 l 的不可见部分在图 104 上用虚线表示(参看第二章§9 可见性的条件)。

问题2 作两平面的交线。

用相交两直线给出平面。设直线$a(a_1, a_2)$和$b(b_1, b_2)$确定平面$\Theta(\Theta_1, \Theta_2)$，而直线$c(c_1, c_2)$和$d(d_1, d_2)$确定平面$\Phi(\Phi_1, \Phi_2)$（图105）。为了求出平面$\Theta$与$\Phi$的交线$n$，作两个水平投射面$\Sigma(\Sigma_1)$和$\Sigma'(\Sigma'_1)$①。平面$\Sigma$与平面$\Theta$和$\Phi$交于直线$l(l_1, l_2)$和$m(m_1, m_2)$。直线$l$和$m$的交点用$N(N_1, N_2)$表示。点$N$同时属于$\Theta$、$\Phi$和$\Sigma$三个平面。因此，点$N$位在已知平面$\Theta$和$\Phi$的交线上。然后作平面$\Sigma'$与已知平面$\Theta$和$\Phi$的交线$l'$和$m'$（$l'=\Sigma'\times\Theta$，$m'=\Sigma'\times\Phi$）。找出点$N'=l'\times m'$。点$N'(N'_1, N'_2)$与点$N$一样也位在平面$\Theta$和$\Phi$的交线上。因此，直线$n\equiv NN'$即为所求的两已知平面的交线：$\Theta\times\Phi=n$。

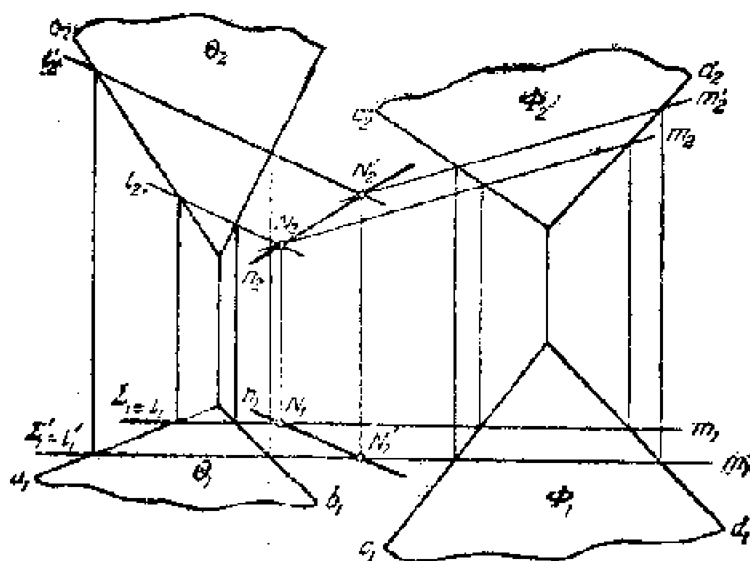


图 105

4. 这样一来，两平面交线的作法可归结为辅助投射面的选用问题。每一个投射面都给出所求交线的一个点。这种方法也用来作两个表面的交线，特别是作两个多面体的交线。这时，为求出交线上足够数量的点，就要作出必需数量的辅助投射面。

§9. 可见性的条件

1. 为了加强图的直观性，我们要对可见性作某种约定。我们的视觉器官是按照中心投射原理构成的②，但在研究用平行投射法作出的图时，要认为视线的方向与投射线的方向重合。

设点A和B位在一条视线上（图106）。用箭头表示"看"图的方向，即向平面Π_1投射的方向。点A和B在水平投影中的可见性问题根据较高的点可见来解决。在已知情况下，正面投影表明点A的位置高于点B。因此，在水平投影中，点A是可见的，而点B被它遮住。

① 图105上$\Sigma\parallel\Sigma'$。但这只是为了方便而不是非此不可。

② 参看"绪论"§1之1。

在另一平面上的投影，采用相似的可见性准则。同时必须记住，视线可见性的方向应该始终与投射的方向重合。

2. 例 试指出与平面 ABC 相交于点 L 的直线 l 的不可见部分(图 107)。

直线 l 与平面 ABC 的交点 $L(L=l\times ABC)$ 的作法已表示在图 104 上。为了确定直线 l 在水平投影中的可见性，可研究点 $K\subset l$ 和点 $M\subset AC$，这两个点的水平投影重合 ($K_1=l_1\times A_1C_1$, $K_1\equiv M_1$)，因而位在同一条水平投射线 $KM\perp\Pi_1$ 上①。如上所述，先假设视线方向与对平面 Π_1 的投射方向重合，则从正面投影看到，对平面 Π_1 来说，点 M 高于点 K。这就是说，在水平投影中，点

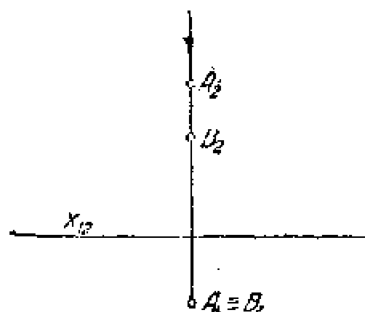


图 106

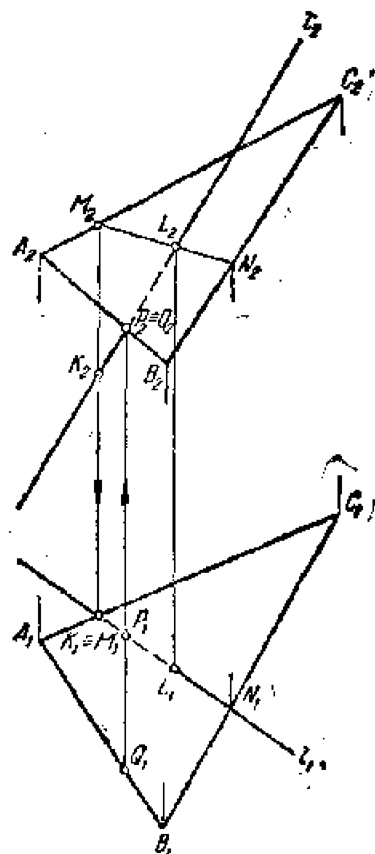


图 107

M 是可见的，而点 K 被 M 遮住。因此，在 Π_1 的投影中，对直线 l 来说，点 K 所在的那一段 KL 不可见。在正面投影中，直线 l 的可见性可用点 $P\subset l$ 和点 $Q\subset AB$ 定出，这两个点在平面 Π_2 上的投影是重合的。点 P 的深度小于点 Q。因此，在 Π_2 的投影中，点 P 不可见，同样，对直线 l 来说，点 P 所在的那一段在正面投影中不可见。

复 习 题

1. 作任意空间形体的复合图的方法是怎样的？
2. 试列举直线和平面在空间可能有的特殊位置，并说明它们在复合图上的图象的特点。
3. 何谓复合图上的固定直线？根据点的两个投影作它的第三个投影的作图规律是怎样的？
4. 何谓定位问题？怎样解两个基本的定位问题？
5. 在复合图上怎样确定点和直线的可见性？

---

① 这种点有时称为"竞争点"。

练 习 题

1. 试根据点 B、C 和 D 的两个投影作它们的第三个投影(图 108)。

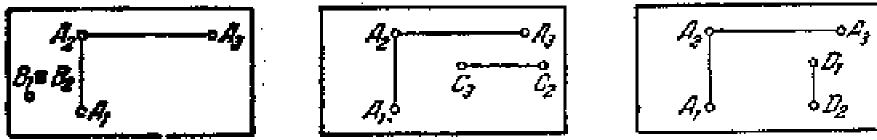


图 108

2. 直线 a 和 b 是否相交(图 109)?

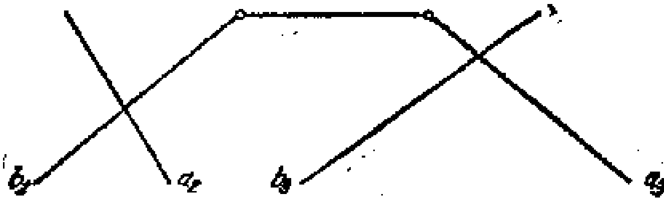


图 109

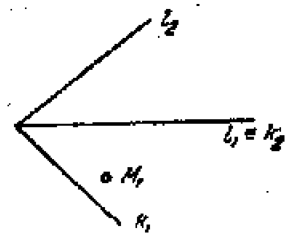


图 110

3. 试通过由直线 k 和 l 确定的平面上的点 M,作这个平面上的等距线(图 110)。

4. 求直线 m 与平面($a \parallel b$)的交点(图 111)。

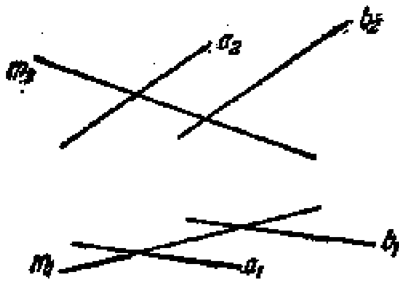


图 111

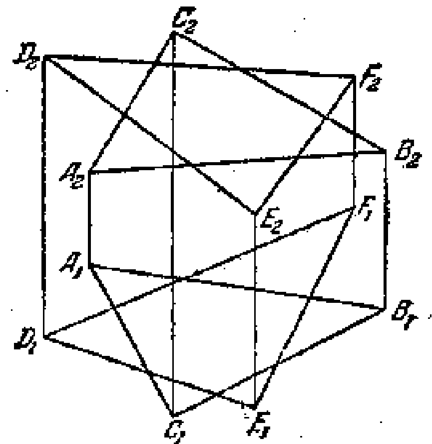


图 112

5. 求作两个三角形 ABC 和 DEF 的交线(图 112)。

第三章 多 面 体

§ 1. 多面体的几种形式和它们在复合图上的图象

1. 由平面多角形围成的立体称为多面体。多面体的元素是顶点、棱边和棱面。多面体所有的棱边的总和称为多面体的网络。如果整个多面体都位在任意一棱面所在的平面的同一边，则这个多面体称为凸多面体，这时它的棱面都是凸多角形。

作多面体的投影可归结为作它的网络的投影。

2. 在各种多面体中，最有实际意义的是棱柱、棱锥、傍面三角台和正凸多面体（柏拉图体）①。

3. **棱柱** 在图 113 上给出一多面体 $ABCDEFGH$ 的投影。如图所示：

$$A_1E_1 \parallel B_1F_1 \parallel C_1G_1 \parallel D_1H_1$$

和

$$A_2E_2 \parallel B_2F_2 \parallel C_2G_2 \parallel D_2H_2。$$

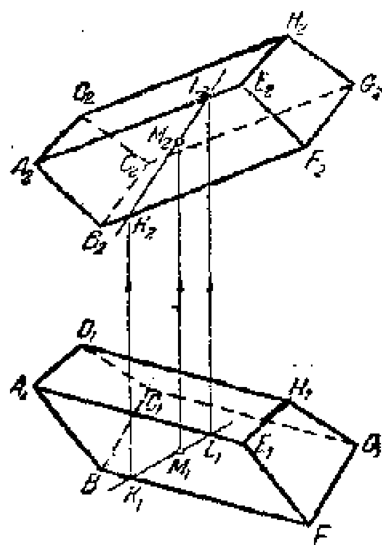


图 113

因此，多面体的侧棱边 AE、BF、CG 和 DH 互相平行。大家知道，这种性质是棱柱所具有的。由多角形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 各对应边（例如 AB 和 EF，BC 和 FG 等）的平行关系推知，这两个底面是平行的。因此，这个棱柱不是截棱柱，并且它的凸底面说明这个棱柱是个凸棱柱②。

在同一个图上表明了作点M的正面投影 M_2 的方法，在棱面$ABFE$上已给出了点M的水平投影 M_1。正面投影利用在棱面 $ABFE$ 上通过点M的辅助直线 KL 找出。M_2 的作图过程如箭头所示。

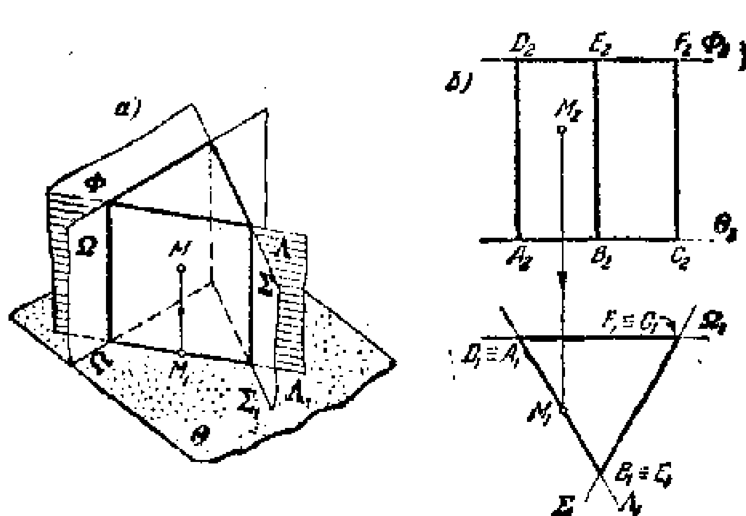
在图 114 上给出正三棱柱 $ABCDEF$ 的直观图和复合图，这个棱柱以最简单的形式放在投影面上。

在这个例子里，棱柱的侧棱面是水平投射面 Ω、Λ 和Σ的一部分，所以，棱柱各侧棱面的水平投影退化为直线段。棱柱的上底和下底是水平面Φ和Θ的一部分，所以，它们的正面投影同样退化为直线段。如果在棱柱的某一棱面（设为 $ABDE$）上取一任意点M而给出了它的一个投影，例如正面投影 M_2，则该点的水平投影应满足条件 $M_1 \subset A_1B_1$。由此 $M_1 = M_2M_1 \times A_1B_1$。

---

① 关于正多面体投影的作法，参看 H. A. 波波夫《画法几何教程》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1947 年版。

② 凸多面体的任何平截面都是凸多角形。



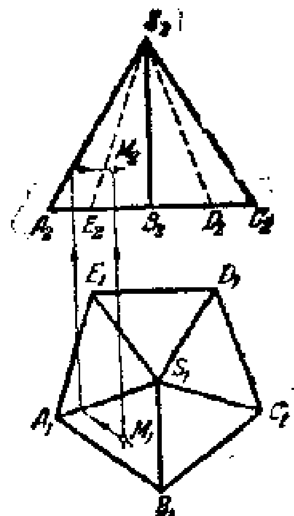


图 114　　　　图 115

4. **棱锥**　在图 115 上给出正五棱锥 $SABCDE$ 的投影。在同一个图上表示出点M的正面投影的作法，这个点位在棱面 SAB 上并已知其水平投影 M_1。为了找出 M_2，在这棱面上过点M作辅助直线平行于棱锥底面的棱边。作图过程如图上箭头所示。

5. **傍面三角台**　傍面三角台是这样的一种多面体，它由两个位在平行平面上的称为底面的多角形，以及若干个三角形或梯形所围成，而这些三角形或梯形的顶点就是那两个底面的顶点。

图 116 给出一个傍面三角台的投影。它的下底面是矩形，上底面是正六角形。如图所示，它的侧棱面有两个是梯形，其余的是三角形。

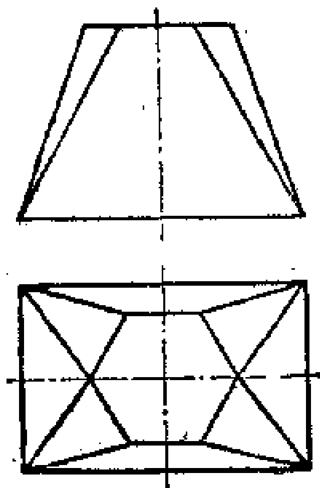


图 116

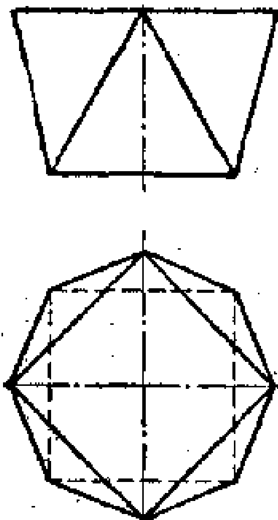


图 117

如果上下两底是全等的正凸多角形，其中心位在两底面的公垂线上，将这两个多角形相对地转一角度 $\varphi=\frac{180^\circ}{n}$（式中 n 是多角形的边数），而所有侧棱面都是正三角形，三角形的顶点又是

底的顶点，那末该傍面三角台就变为反棱柱[1](图 117)。

6．在投射多面体时，它的空间位置具有重大的意义。作为例子，在图 118，а 和 б 上作出同一个八面体、但对投影面处于不同位置时的各个投影，并且为了便于比较，给八面体的两个顶点作了标记。指出这点是很有意思的：八面体在两种不同的位置下可能得到完全一样的投影(图118，в 和г)。这种情况在绘制工程图时必须考虑到。

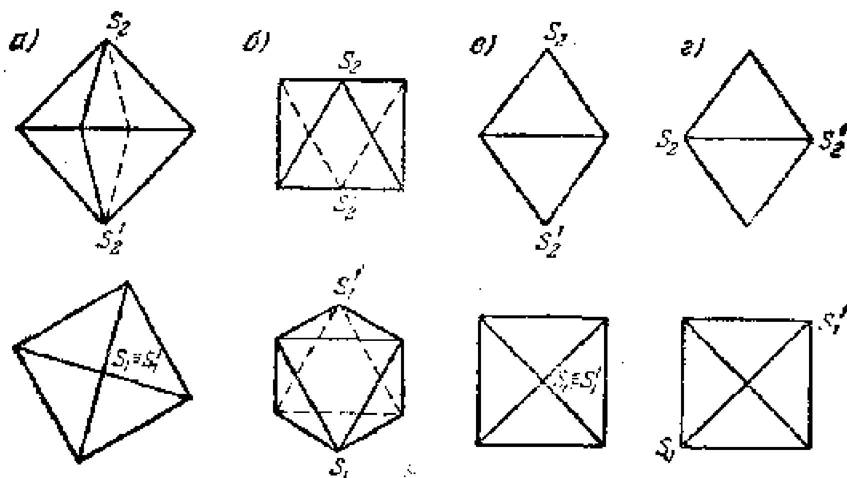


图 118

§2. 平面与多面体相交

1．任何一个表面或立体与平面相交时，就得到某种形状的平面图形，这种图形称为截面。显然，多面体的截面只能由一些直线段围成，并且可由一个或 n 个多角形[2]组成。这种多角形的边数等于多面体被截平面所截割的棱边数。譬如，随截平面的位置而确定立体的截面可以是三角形、四角形、五角形和六角形(图 119)。

截面多角形的顶点是多面体棱边与截平面的交点。因此，多角形的顶点数等于与截平面相交的多面体的棱边数。在图 119 上我们看到，在第一种情况下，平面截割三条棱边，在第二种情况下，平面截割四条棱边，等等。

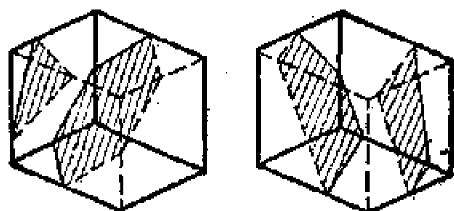


图 119

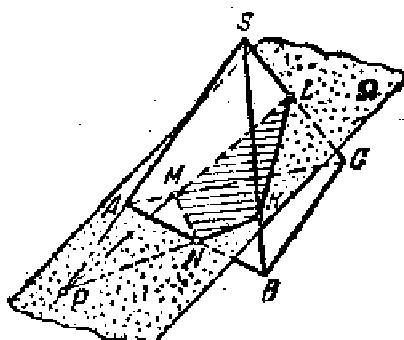


图 120

[1] 反棱柱属于所谓半正阿基米得体。正八面体是最简单的反棱柱，它同时又属于正柏拉图体(参看图 118，б)。

[2] 在特殊情况下，截面多角形可退化为直线和点。实际上，所谓截面是指包含在多面体内的那部分截平面。

2. 多面体的平截面有两种不同的作法：1）找出截面 n 角形的顶点（棱边法）和2）找出截面 n 角形的边（棱面法）。

第一个方法归结为重复解第一个基本定位问题——求直线与平面的交点；第二个方法归结为求两平面的交线。

这两个方法还可以综合应用。

应该注意，截面多角形的顶点是截平面与多面体棱边本身的交点。因此，截平面与棱边的延长线的交点不可能是截面多角形的顶点，因为这些点不在多面体的表面上，但是可以利用这些点来方便作图或增加作图的准确性。例如，图 120 上的点 P 因为不在棱边 AS 本身上，所以这个点不是截面多角形的顶点，但是如果适当地利用这个点来找截面图形的顶点 M 和 N，就可提高作图的准确性。

同样，只有属于棱面本身的直线段，才可以成为截面多角形的边。

3. 现在来研究**投射面**与多面体相交的例子。它们是易于解决的，因为截面的一个投影退化为直线段。

例如，设正面投射面 Ω 与棱锥 $SABCDEF$ 相交（图 121）。

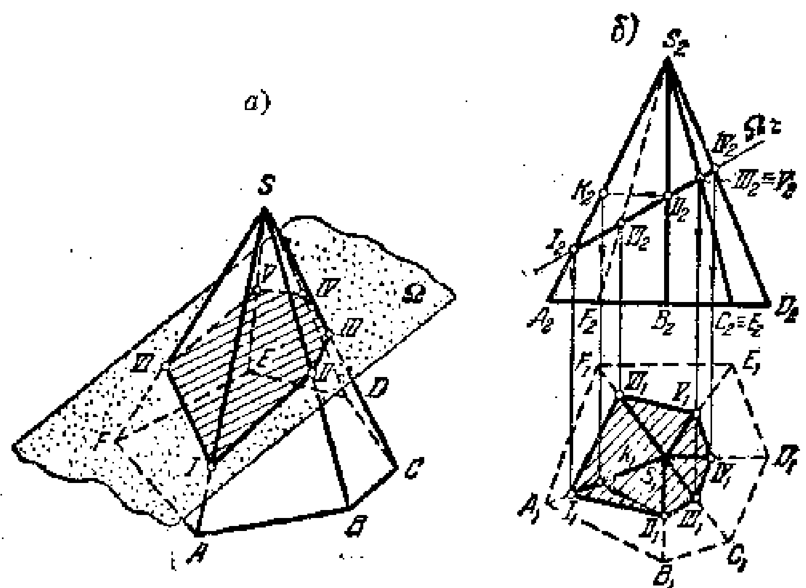


图 121

不难看出，截面多角形 $I\ II\ III\ IV\ V\ VI$ 的正面投影 $I_2 II_2 III_2 IV_2 V_2 VI_2$ 退化为与截平面的正面投影重合的直线段。

沿连系线找出截面多角形顶点的水平投影 I_1、II_1、III_1、IV_1、V_1 和 VI_1。因为顶点 II 所在的棱边 BS 是侧平线，为了作出点 II_1，可利用在棱面 SAB 上作出的辅助水平线 KII。用直线段依次连接点 I_1、II_1……等之后，即得截面的水平投影——凸六角形 $I_1 II_1 III_1 IV_1 V_1 VI_1$①。

① 为了使图形具有很好的直观性，截平面 Ω 当作是不透明的。但这种假定不是必须的，只是在适当情况下要利用它。

4. 我们来研究一般位置平面与多面体相交的例子。

问题的解变得复杂了，因为截面无论投射到平面 Π_1 或平面 Π_2 上都不可能成为直线段。

例如，设一般位置平面 (qDr) 与棱柱 $ABCA^1B^1C^1$ 相交(图 122)。

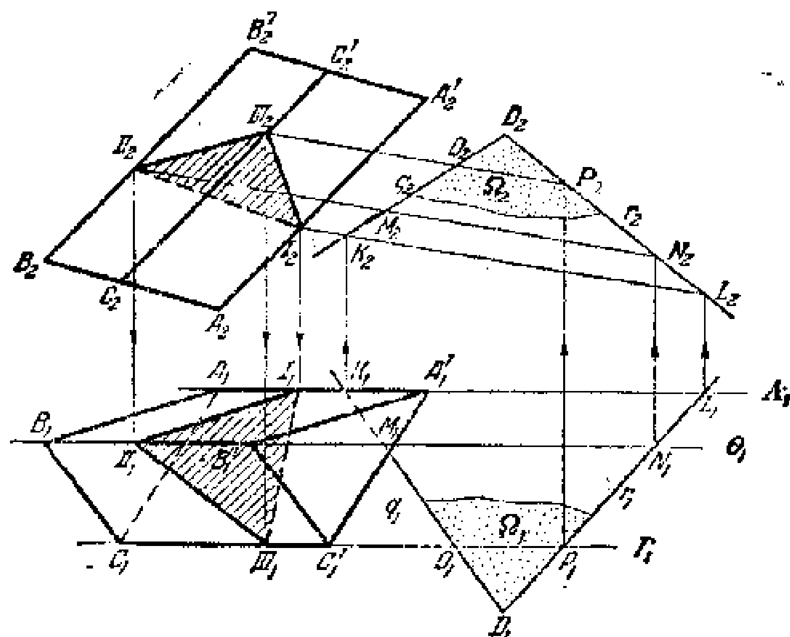


图 122

在本例中，采用"棱边法"是最适当的。先求棱边 AA^1 与截平面 (qDr) 的交点。为此，通过棱边 AA^1 作辅助平面 Λ(棱柱侧棱边的位置提示我们这时利用水平投射面最方便)。

平面 Λ 与平面 (qDr) 相交于直线 KL。直线 AA^1 和 KL 位在同一平面 Λ 上。因此，点 I_2 是这两条直线的交点 I 的正面投影，它的水平投影 I_1 可沿连系线找出。这样，点 $I(I_1, I_2)$ 是棱边 AA^1 与平面 (qDr) 的交点。这个过程可用我们习惯的标记写出：$I = AA^1 \times (qDr)$。

通过棱边 BB^1 和 CC^1 分别作平面 Θ 和 Γ，同理可得：

$$II = BB^1 \times (qDr) \text{和} III = CC^1 \times (qDr)。$$

所作出的点就是所求的截面多角形的顶点，此处所求的截面多角形就是三角形 $I\,II\,III$。截面无论投射到平面 Π_1 或平面 Π_2 都变了形。截面的边如位在不可见的棱面上，则用虚线画出。

由于棱柱的侧棱边是平行的，因而平面 Λ、Θ 和 Γ 也平行。因此，直线 KL、MN 和 OP 也平行。所以，为了求直线 MN 和 OP 的正面投影，只要沿连系线找到点 N_2 和 P_2(或 M_2 和 O_2)，并通过它们引平行于 K_2L_2 的直线便可，这就提高了作图的准确性，并使作图简化(因无需引 M_1M_2 和 O_1O_2 两条连系线)。应该注意，在 K_2L_2、M_2N_2 和 O_2P_2 三条直线中，直线 K_2L_2 作得最准确，因为点 K_2 和 L_2 的距离大于点 M_2 和 N_2 或点 O_2 和 P_2 间的距离。所以，如果先作直线 O_2P_2，然后通过点 L_2 和 N_2 引平行直线 K_2L_2 和 M_2N_2，就会降低作图的准确性。

在另一种情况下，平面 Ω 与底面放在平面 Π_1 上的正棱柱相交，而平面 Ω 由正平线 l 和水平线 k 给出，这两条直线相交于投影轴 x 上的点 F(图 123, a 和 $б$)。

应该注意，正平线 l 和水平线 k 是平面 Ω 与两个投影面的交线，这种直线称为平面的迹线。

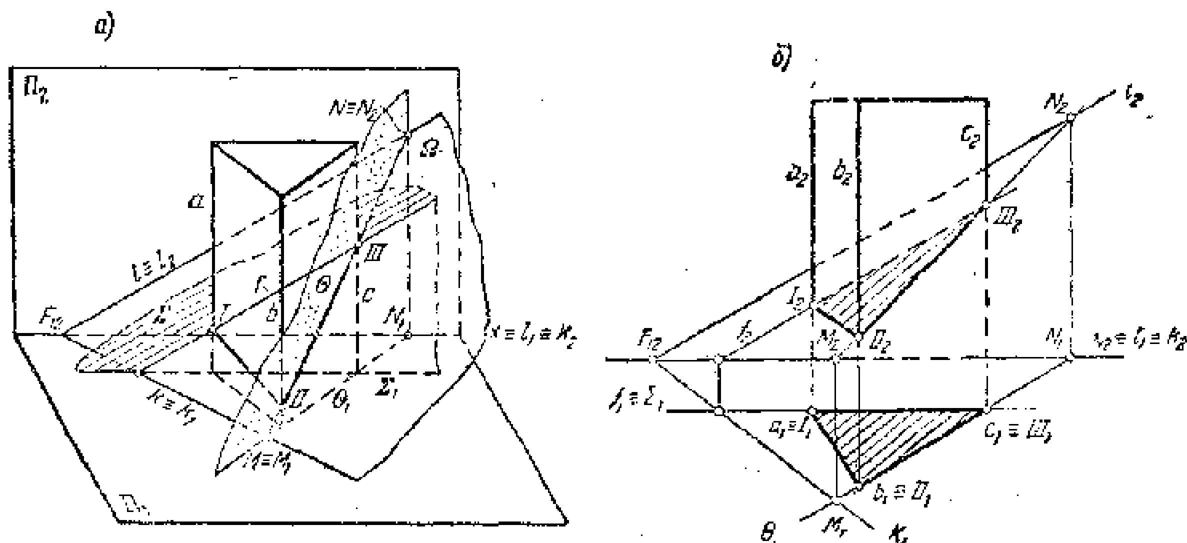


图 123

因此可以说，棱柱被一般位置的迹线平面所截。

因为棱柱的侧棱面是投射面的一部分，所以解题时用"棱面法"最为方便。

譬如，棱面 bc 是围成多面体的水平投射面 Θ 的一部分，平面 Θ 与平面 Ω 相交于直线 MN。这直线在棱边 b 和 c 之间的一段 $II\ III$ 就是棱面 bc 与平面 Ω 的交线。这样就找到截面多角形的一条边。

平行于平面 Π_2 的棱面 ac 是正平面 Σ 的一部分，平面 Σ 与平面 Ω 相交于正平线 f。该正平线上的线段 $I\ III$ 是棱面 ac 与平面 Ω 相交的直线段。这就作出了截面多角形的第二条边。顶点 I 和 II 还确定了截面的第三条封闭的边。截面的边 $I\ III$ 的正面投影用虚线画出，因为棱面 ac 的正面投影不可见。

§3. 亲似对应在作多面体的平截面中的应用

1. 大家知道，在平面图形的水平投影和正面投影之间，如果任意一个投影都不是退化的，则由这两个投影建立起来的对应称为亲似对应。因此，在一般情况下，多面体平截面的两个投影是亲似的。

设斜棱柱 abc 与一般位置平面 $(qD\tau)$ 相交（图 124）。试利用亲似对应的特性来作截面的投影。

作出由截平面建立的亲似对应的轴 s_{12}，它通过亲似直线 q_1 和 q_2 及 τ_1 和 τ_2 的交点 $(E_1\equiv E_2)$ 和 $(F_1\equiv F_2)$。亲似方向则平行于连系线，例如直线 D_2D_1。

试作棱柱上某一棱边（例如棱边 a）与截平面的交点。

在截平面上引辅助直线 t，使它的正面投影 t_2 平行于棱柱的侧棱边的正面投影。水平投影 t_1 可根据这样的条件作出，即它应当通过亲似于 D_2 的点 D_1，而且应当与亲似于它的直线 t_2 相交于亲似轴 s_{12}。在截平面上引直线 k 平行于直线 t，但使它的正面投影 k_2 与棱柱上的棱边 a 的正面投影 a_2 重合。水平投影 k_1 与 t_1 平行并与亲似于它的直线 k_2 相交于亲似轴 s_{12}。直线 a_1 与 k_1 的交点 I_1 是点 I 的水平投影。这个点既在直线 k 上，又在直线 a 上，所以就是棱边 a 与平面 $(qD\tau)$ 的交点。沿连系线作出正面投影 I_2。

同样，在平面 $(qD\tau)$ 上引直线 l 和 m，使 $l_2\equiv b_2$ 和 $m_2\equiv c_2$，而 $m_1 \parallel l_1$；$l_1 \parallel t_1$，作出交点 (II_1, II_2) 和 (III_1, III_2)，这就是所求截面的其余两个顶点。

如果在截平面上引平行于直线 t 的直线 k, l, m，使 $k_1\equiv a_1$，$l_1\equiv b_1$ 等等，其结果不变。

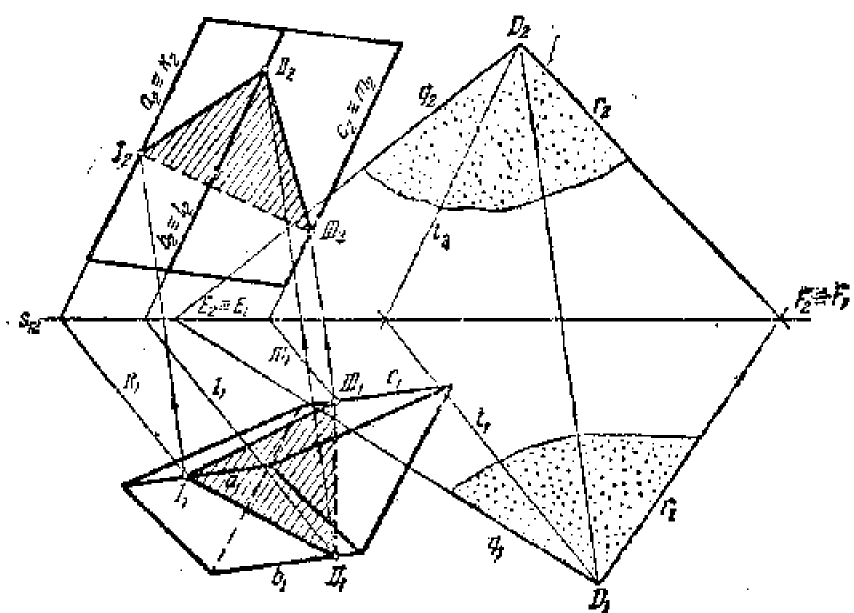


图 124

2. 应该注意，有时利用透射对应的特性更为方便，特别是当棱柱或棱锥的底面是投射面，而且在这个投射面上给出了截平面的迹线时。这种例子见图 125。在该图上，水平线 h 可以看作是截平面 Ω 在棱锥底面所在的等距面 Θ 上的迹线。

假设截面已经作出。如果取棱锥的底面 Θ 作为投影面，而取锥顶 S 作为投射中心，则六角形 ABC……可以看作是截面 $I\ II\ III$……的中心投影。反之，把截面所在的平面作为投影面，并以相同的点 S 作为投射中心，六角形 $I\ II\ III$……就可以看作是底 ABC…… 的中心投影。因此，棱锥的底与它的任何平截面是成透射的。它们的水平投影——六角形 $A_1B_1C_1$……和 $I_1II_1III_1$……也成透射[①]。这两个六角形的对应边 A_1B_1 和 I_1II_1、A_1C_1 和 I_1III_1 等等应当相交于透射轴 s_0。由此得出下面利用透射对应的特性作截面投影的方法。

先用普通方法找出棱锥的某一侧棱边与已知截平面的交点，设点 (I_1, I_2) 就是这样的点，它是利用通过棱边 AS 并与平面 Ω 相交于直线 PQ 的辅助正面投射面 Σ 作出的。

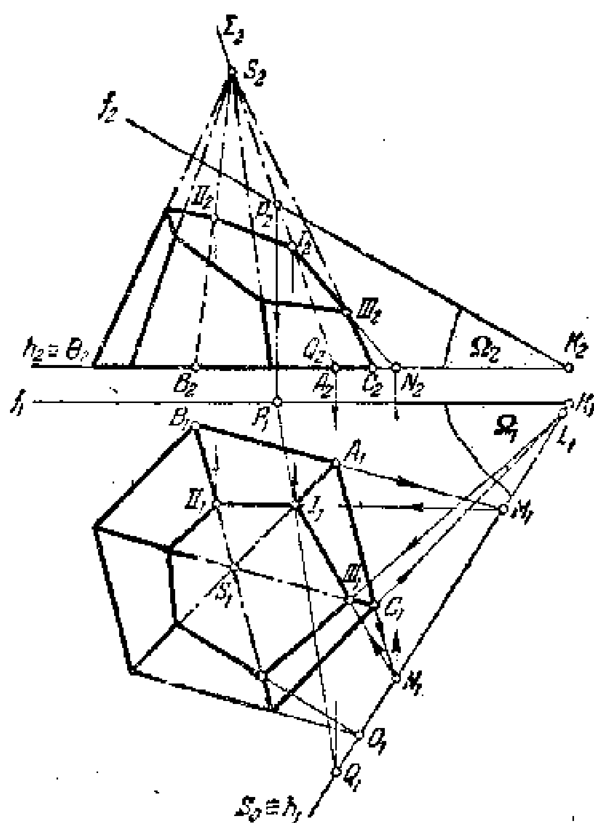


图 125

截面水平投影的继续作图就归结为作与已知六角形 $A_1B_1C_1$……成透射的所求的六角形 $I_1II_1III_1$……。这个透射对应由透射中心 S_1，透射轴 $s_0 \equiv h_1$ 和一对对应点 A_1 和 I_1 确定。

① 应当利用点 O_1 来检查作图的准确性。

作所求截面的正面投影时，既可以象图中求顶点 I 和 II 那样，沿连系线作出截面各顶点的正面投影，也可以象图中作直线 NI 那样，求直线 MII、MI 等等的正面投影，它们的对应线段就是所求截面多角形的各条边。

§4. 直线与多面体相交

1. 直线可能与多面体的表面交于一点、两点或更多的点，但与任一凸多面体的交点不会多于两个。直线与多面体的交点通常称为贯穿点。

求直线与多面体的贯穿点的一般方法是根据我们非常熟悉的第一个基本定位问题的解法，即通过已知直线作辅助平面(通常是投射面，但不一定是！)，并作出截面的投影。所求的点就是已知直线与截面多角形的边的交点[①]。图 126 已清楚地表明了所说的方法。

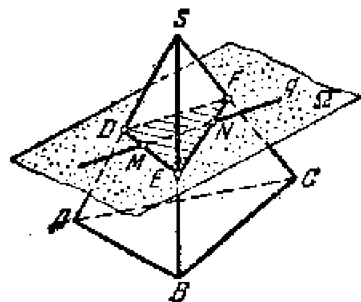


图 126

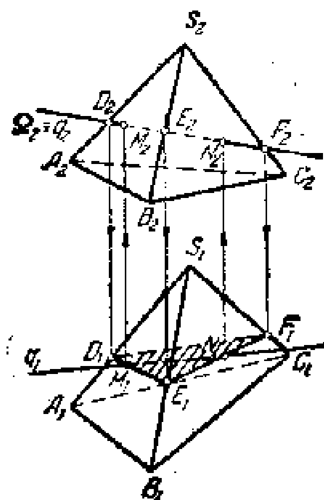


图 127

图 127 表示这个一般方法如何应用在复合图上，为了求直线 q 与四面体 $SABC$ 的贯穿点 M 和 N，在图上过已知直线 q 作辅助正面投射面 Ω，并作出截面 DEF 的投影。直线 q 的水平投影 q_1 与截面 DEF 的水平投影 $D_1E_1F_1$ 的交点 M_1 和 N_1 即为所求贯穿点的水平投影。正面投影 M_2 和 N_2 可沿连系线求得。

2. 有时，通过直线作其它任一平面来代替投射面更加有利。

例如，假设要作出直线 q 与棱柱 (abc) 的交点（图 128）。从图上可见，棱柱的底是正面投射面 Θ 的一部分。我们利用这一点，因而过直线 q 作平行于棱柱的棱边的一般位置平面 Ω，而不象上面的例子那样作投射面。为此，可在直线 q 上任取(但要作图方便)一点 K，并过该点引直线 l 平行于棱柱的侧棱边。相交两直线 q 和 l 就确定了平行于棱柱侧棱边的辅助平面 Ω。

作出平面 Ω 与平面 Θ 的交线 LO。这直线与棱柱的底交于点 P 和 Q（图上表示出它们的水平投影)。过这两个点作平面 Ω 与棱柱相交的交线 m 和 n。因为平面 Ω 平行于棱柱的棱边，所以交线也应当平行于棱边。因此，过点 P_1 和 Q_1 引平行于棱边的水平投影 a_1、b_1、c_1 的直线 m_1 和 n_1，直到与直线 q_1 相交于点 M_1 和 N_1。点 M_1 和 N_1 即所求贯穿点的水平投影。求正面投影 M_2 和 N_2 时，

① 如果直线与截面多角形不相交，这就是说直线与多面体不相交。

可以根据连系线来求，如求点 N_2 那样；也可先作出直线 m 和 n 的正面投影 m_2 和 n_2，如在图 128 上求点 M_2 那样。

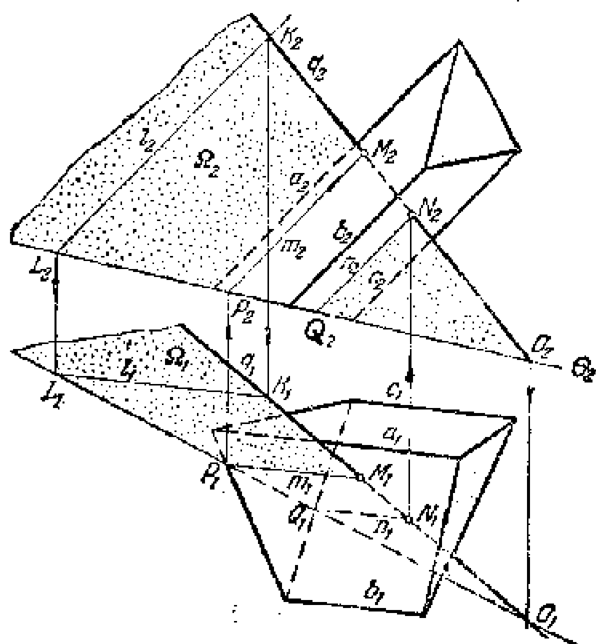


图 128

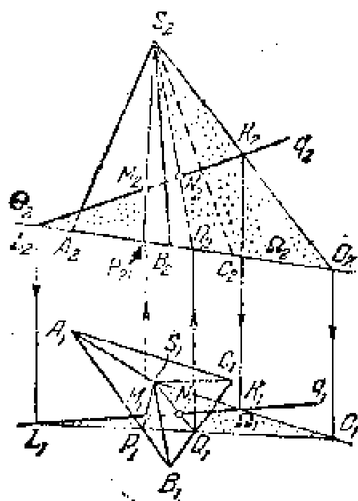


图 129

对于棱锥，如果它的底是投射面的一部分(图 129)，则通过顶点 S 和已知直线 q 作辅助平面 Ω 较为方便。其它方面，问题的解与上例类似。

3. 如果与直线相交的多面体，其棱面是投射面的一部分时，问题便变得非常简单(图 130)。

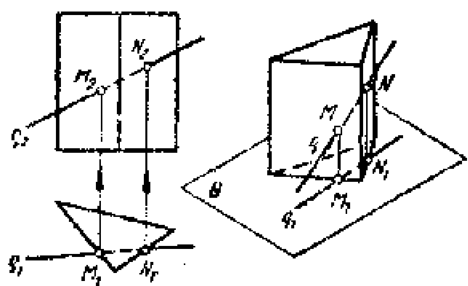


图 130

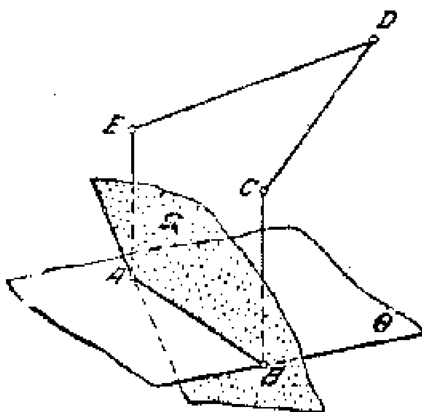


图 131

§5. 一般形式的多面体相交

1. 两个多面体的表面交线是闭合的空间折线。这交线可以分解为两条或两条以上也是闭合的折线，其中包括平面多角形。折线的一条边或一段是一直线段，两多面体的棱面沿这些线段相交。

折线的各顶点是第一个多面体的棱边与第二个多面体的棱面的交点和第二个多面体的棱边与第一个多面体的棱面的交点(在特殊情况下，折线的顶点可以是两个多面体的棱边的交点)。

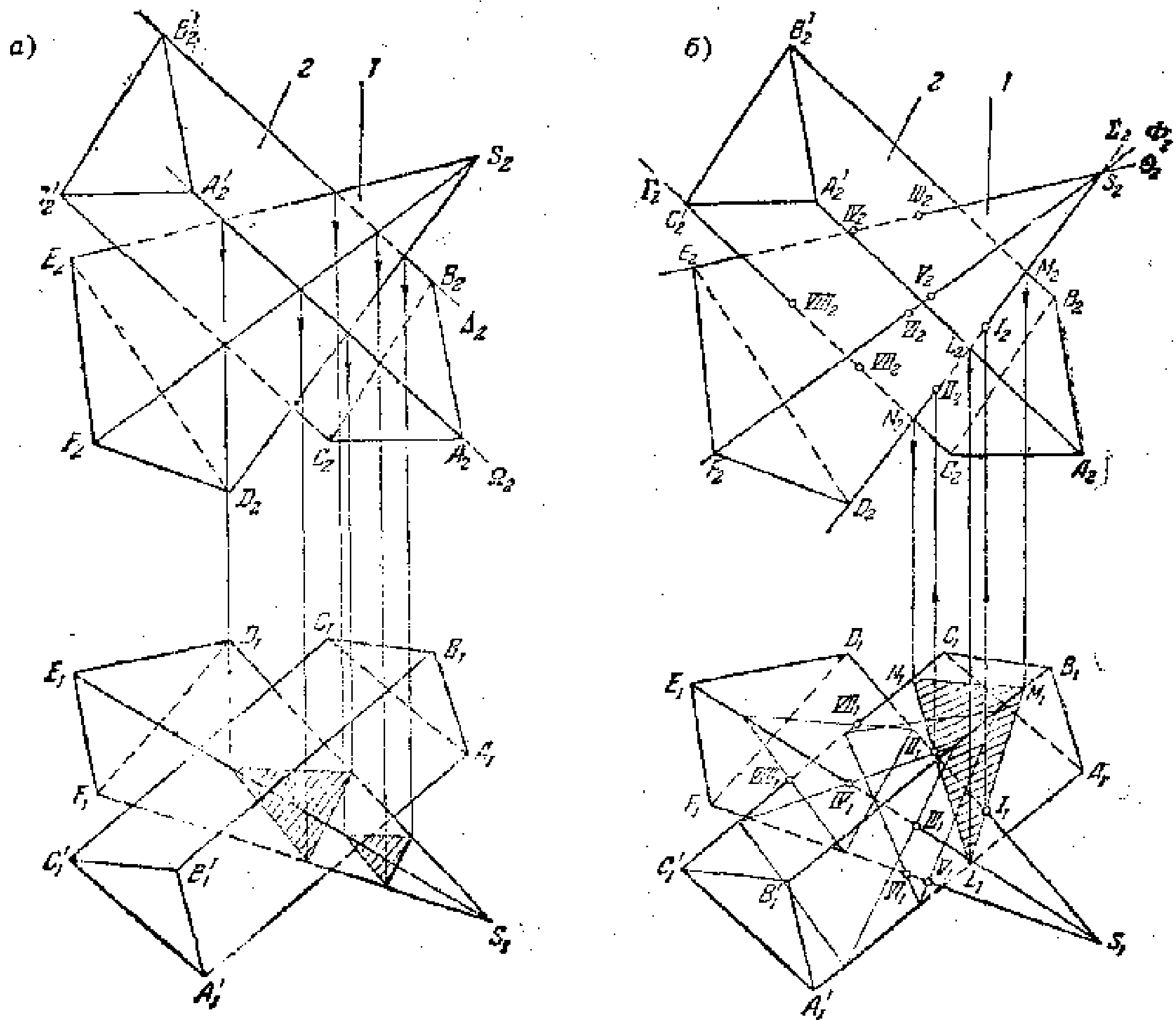
由此得出求两个多面体交线的两个方法：1）找出折线的顶点(棱边法)和2）找出折线的边(棱面法)。

当用第一个方法时，求法归结为重复解第一个基本定位问题——求直线与平面的交点，而用第二个方法时，则求法归结为重复解第二个基本定位问题——求两平面的交线。

实际应用时，主要是用第一个方法。

2．折线的两个顶点只有既位在第一个多面体的同一棱面上，同时又位在第二个多面体的同一棱面上，才可以用直线相连。

事实上，假设已作出的两多面体的交线是空间折线 $ABCDE$(图 131)，则如上所述，折线的每条边就是两多面体各棱面的交线的一段。但这时通过折线的任何一条边(例如通过边 AB)的必有一个多面体的一个棱面 Ω 和其余那个多面体的某个棱面 Θ。因此，点 A 和 B(或其它任意相邻的一对折线顶点)应该在第一个多面体的同一棱面上，同时又在第二个多面体的同一棱面上。



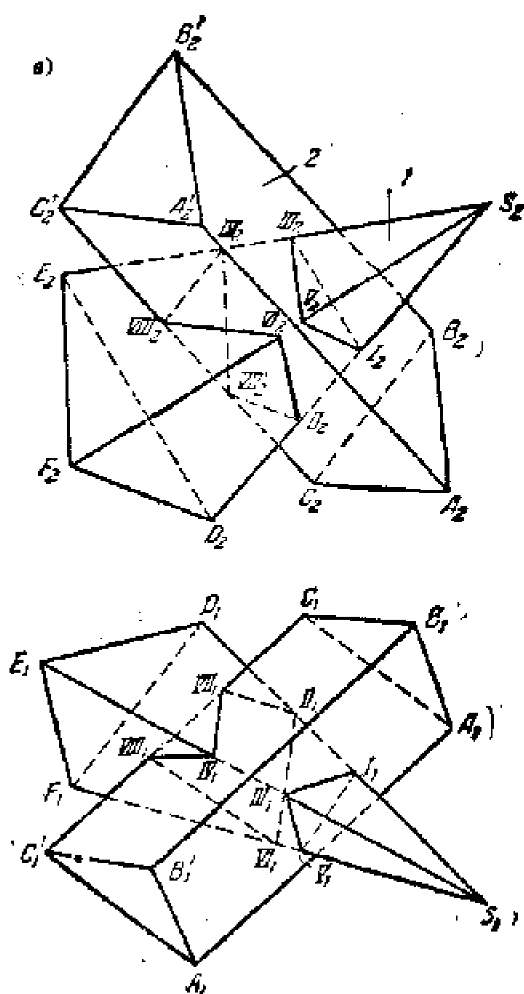


图 132

在连接折线顶点时，如确定顺序发生困难，可使用辅助图表或表格。作这种辅助表格的例子以后再谈。

3. 交线的投影只能位在两多面体各个同名投影所占的面积范围内①。

因此，其中一个多面体的任一棱边的投影，即使只在一个投影中不与两多面体投影的公共面积相交，这条棱边就不与其余那个多面体相交。

但是，一个多面体的任一棱边的投影，即使在这一个和在另一个投影上都与公共面积相交，还不能说这条棱边就与其余那个多面体的棱面相交。在一般情况下，这个问题的答案只有在完成相应的作图过程才能得到。图 132, a 所给出的相交棱柱和棱锥就是这样。只有通过棱柱的棱边 AA^1 作辅助截平面 Ω 并作出截面三角形的投影后，才能断定这棱边不与棱锥的棱面相交。对于棱边 DB^1 也是这样。

4. 用“棱边法”来作图 132 所示的两个多面体的交线。

---

① 这里应该把面积理解为平面的一部分。

根据上述1、先找出第一个多面体(设为棱锥)的棱边与第二个多面体(棱柱)的棱面的交点。棱锥底面的棱边 DE、EF 和 FD 与棱柱的棱面不相交，因为它们的投影与棱柱的投影不相交。

至于棱柱的两个底面的棱边也是如此。因此，棱锥的侧棱边只能与棱柱的侧棱面相交，反之亦然。现在求棱边 DS 与棱柱的棱面的贯穿点。为此，过棱边 DS 作辅助正面投射面 $\Sigma(\Sigma_2 \equiv D_2S_2)$。平面 Σ 与棱柱交于三角形 LMN(图 132,б)。

棱锥上我们所研究的棱边 DS，其水平投影 D_1S_1 分别与直线 L_1N_1 和 L_1M_1 相交于点 II_1 和 I_1。因此，点 I_1 和 II_1 分别是棱边 DS 与棱面 AA^1BB^1 和棱面 AA^1CC^1 的交点的水平投影。现在把这些结果记入表中，并在图上注出各点的号码。

交线的顶点	该顶点所在的棱面	
	棱锥的棱面	棱柱的棱面
I	DES 和 DFS	AA^1BB^1
II	DES 和 DFS	AA^1CC^1
III	DES 和 EFS	AA^1BB^1
IV	DES 和 EFS	BB^1CC^1
V	EFS 和 DFS	AA^1BB^1
VI	EFS 和 DFS	AA^1CC^1
VII	DES	AA^1CC^1 和 BB^1CC^1
VIII	EFS	AA^1CC^1 和 BB^1CC^1

应该注意，既然点 I 和 II 位在棱锥的棱边 DS 上，所以它们同时属于该棱边的相邻两棱面，这也在表内第二栏反映出来了。

同样，过棱锥的侧棱边 ES 和 FS 作辅助平面 Θ 和 Φ，并分别作出点III和 IV，V 和 VI。这些结果也分别记入表中(棱边 ES 在第三、第四行，棱边 FS 在第五、第六行)。

将各顶点的号码标注在图上。

其次，我们来求第二个多面体(棱柱)的棱边与第一个多面体(棱锥)的棱面的交点。在给出的情况下，我们已经知道，棱柱只有一条侧棱边 CC^1 与棱锥的棱面相交。通过这棱边作正面投射面 Γ，作出所求的点 VII 和 VIII。这些结果也记在表中（最后两行），并在图上注出这些点的号码。

应该注意，既然点 VII和VIII位在棱柱的棱边CC^1上，则它们同时位在该棱边的相邻两棱面上，这也写在表内第三栏中。

余下是按一定次序连接所得各点——空间多角形的顶点。

回头看一下所编制的表，就可以看出点 I 和 V 可以相连，因为它们位在棱锥的同一棱面DFS上，同时位在棱柱的同一棱面AA^1BB^1 上。但是点 I 和 II 则不能相连接，因为它们虽然位在棱锥的同一棱面 DES 或 DFS 上，可是位在棱柱的不同棱面上。

结果，利用这个表可以定出点的连接次序如下：

$I—III—V—I$(闭合线)和$II—VII—IV—VIII—VI—II$(闭合线)(图 132, в)。

在本例中，交线分解为两支：三角形$I—III—V$和空间五角形$II—VII—IV—VIII—VI$。

在连接折线的顶点时，必须考虑折线每条线段的可见性。显然，可见的线段是同时位在第一个和第二个多面体的可见棱面上的。例如，线段$VI\,VIII$的正面投影$VI_2\,VIII_2$(参看图 132, в)是可见的，因为在正面投影上，棱锥的棱面EFS和棱柱的棱面AA^1CC^1都是可见的，而所讨论的线段就是这两个棱面的交线。同一线段的水平投影VI_1VIII_1是不可见的，因为在水平投影上，虽然棱锥的棱面EFS可见，但棱柱的棱面AA^1CC^1不可见。

§6. 棱柱和棱锥相交

1. 读者可能已经发觉，在前面讨论的两多面体交线的作法中有一个缺点。这就是对于棱柱和棱锥各底面的各棱边，我们能够根据本章§5之3中所述的理由断定它们不参与相交，但对于棱柱和棱锥的侧棱边，我们却不能预先确定它们中哪一些与相应的多面体的棱面相交。还须经过作图来解答这个问题。

下面叙述的求两个多面体交线的方法，称为转动平面法，可以消除上述的缺点。但是这种方法实际上只有当每一个相交的多面体的全部侧棱边都相交于一点时才能应用。棱锥和棱柱就是这样的多面体。

设已知两相交棱锥$SABC$和$TDEF$，它们的底面位在一个平面上，例如位在水平面Π_1上。试作出它们的交线(图 133)。

过两棱锥的顶点引直线ST，并作出该直线在平面Π_1上的迹点M。过该直线和其中一棱锥的任一侧棱边(假定这侧棱边与另一棱锥的棱面相交)作辅助截平面。设这一侧棱边为棱锥1的棱边AS。这时，截平面由相交两直线ST和AS确定。点A可以看作是棱边AS在平面Π_1上的迹点。因此，平面$(ST\times AS)$与平面Π_1的交线k通过点M和A，这就是截平面在平面Π_1上的迹线。

图上可见，迹线k与棱锥2的底DEF不相交。因此，截平面与棱锥2的棱面不相交，但这时棱边AS也不可能与棱锥2相交。同样，可证明棱边BS也不与棱锥2相交(因直线l不与DEF相交)。

过直线ST和棱锥1的棱边CS所作的平面，其迹线m与棱锥2的底DEF相交。因此，棱边CS与棱锥2的棱面相交。

总之，利用所述的方法(实际上我们不必把线作出，只要用直尺依次通过点M_1和A_1，M_1和B_1、M_1和C_1，M_1和D_1等即可)，就能预先知道棱锥1有哪些棱边与棱锥2的棱面相交，反之亦然。

现在以棱边CS为例，说明如何作出所求的该棱边与棱面的交点。

平面$(ST\times CS)$通过顶点T，而且它的迹线m与底面DEF相交于点Q和R。因此，平面与棱锥2相交于母线QT和TR。直线Q_1T_1和T_1R_1与直线C_1S_1的交点I_1和II_1，就是所求的棱锥

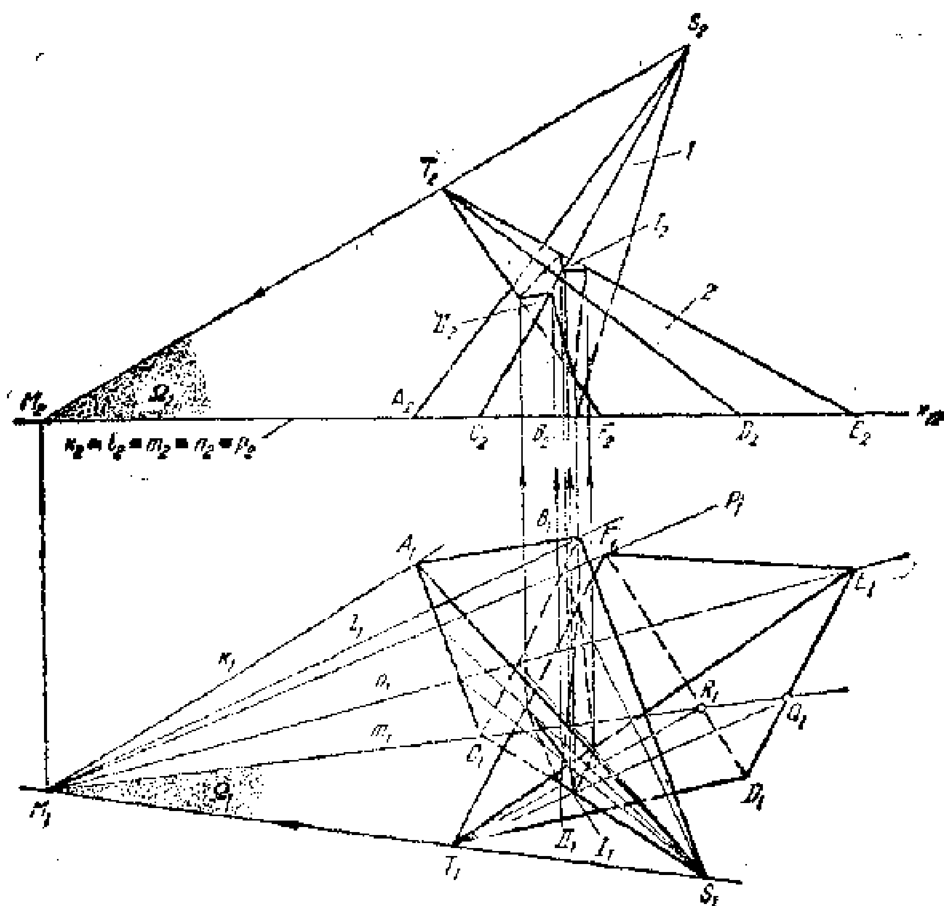


图 133

1 的棱边 CS 与棱锥 2 的棱面 DET 和 DFT 的交点的水平投影。

沿连系线作正面投影 I_2 和 II_2。通过直线 ST 及棱边 ET 和 FT 作辅助平面，便可作出两棱锥交线的其余几个顶点，在本例中交线只有单独的一支。

2. 如果把其中一棱锥的顶点，例如顶点 S，移到无穷远，这个棱锥就变成棱柱，而连接棱锥和棱柱顶点的直线 $S_\infty T$ 就平行于棱柱的棱边(图 134)。图上可见，侧棱边 AA^1 和 DT 没有参与相交，因为平面($S_\infty T \times AA^1$)的迹线 k 与棱锥的底面不相交，而平面($S_\infty T \times DT$)的迹线 l 与棱柱的底面也不相交。在图上表示出求在棱柱棱边 BB^1 上的顶点 I 和 II 以及在棱锥棱边 FT 上的顶点 III 和 IV 的作图过程。交线上其余的顶点也可以用同样的方法作出。应该注意，通过直线 $S_\infty T$ 的辅助截平面只能与棱柱相交于与其侧棱边(母线)平行的直线。在图 134 上作出两条这样的直线 $UIII$ 和 WIV 的水平投影。

3. 当两个棱锥都用棱柱代替时，顶点 S 和 T 都移到无穷远，通过它们的直线就变为非固有直线 $S_\infty T_\infty$。如上所述，我们将要通过连接两多面体顶点的直线作截平面，在现在的情况下，就要通过直线 $S_\infty T_\infty$。

无穷远点 S_∞ 和 T_∞ 的位置分别由两棱柱侧棱边的方向来确定。因此，很容易作出通过无穷远直线 $S_\infty T_\infty$ 的平面 Σ：任意给出空间一点(但要便于作图)，例如点 K(图 135)，并通过它引直线

图 134

图 135

a 和 d 分别平行于相应棱柱的棱边。相交两直线 a 和 d 就确定所求的平面 Σ。直线 a 和 d 在平面 Π_1 上的迹点 M 和 N 确定平面 Σ 的迹线。这时辅助截平面的迹线 k、l、m 等等都平行于 MN①。

回到图 135，可以看出棱柱的侧棱边 AS_∞ 和 DT_∞ 不参与相交，因为平面 $(S_\infty T_\infty \times AS_\infty)$ 的迹线 k 与棱柱 2 的底 DEF 不相交，而平面 $(S_\infty T_\infty \times DT_\infty)$ 的迹线 l 与棱柱 1 的底 ABC 也不相交。

通过棱柱 2 的棱边 ET_∞ 并具有迹线 $m \equiv m_1$ 的平面 $(S_\infty T_\infty \times ET_\infty)$，与棱柱 1 相交于直线 QS_∞ 和 RS_∞，这两条直线都平行于棱柱 1 的侧棱边 AS_∞、BS_∞ 和 CS_∞。通过棱柱 1 的棱边 BS_∞ 并具有迹线 $n \equiv n_1$ 的平面 $(S_\infty T_\infty \times BS_\infty)$ 与棱柱 2 相交于直线 UT_∞ 和 WT_∞，这两条直线也都平行于棱柱 2 的侧棱边 DT_∞、ET_∞、FT_∞ 等等。

4. 两多面体中即使只有一个的表面是投射面，求它们交线的问题就变得很简单。

在图 136 上给出一个例子。这里只有点 I 和 IV 需用截平面 Σ 作出，折线上其余各顶点直接由多面体的已知投影确定。

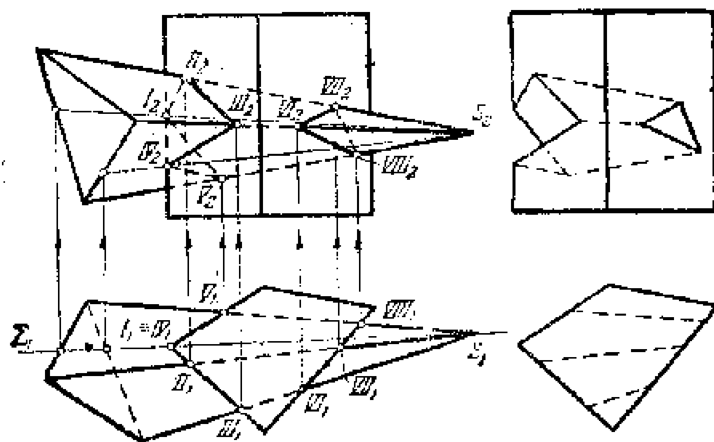


图 136

复 习 题

1. 怎样的多面体才有如图 137 所示的投影。为了使这个图具有可逆性，应给它附加些什么条件？

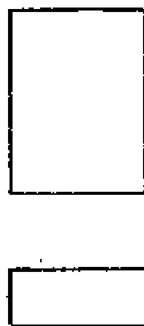


图 137

① 凡相交于无穷远直线的平面都是平行的。因此，所有通过直线 $S_\infty T_\infty$ 的辅助截平面都互相平行。

2*. 反棱柱（参看图117）有多少个棱面可以作出亲似轴；在这些亲似轴中是否有平行于投影轴的（假如在图上给出投影轴）？

3. 试述作两个多面体交线时采用的"棱边法"的实质。

4. 在图121上采用了"棱边法"作截面。如果解此题时采用"棱面法"，如何合理地选取辅助截平面（需要作几个）？

5*. 如果在图133上两棱锥的顶点连线平行于平面Π_1，则由辅助截平面所确立的亲似对应的亲似轴在何位置？

6. 试指出多面体（参看图142）不参与相交的棱边。

练 习 题

1. 已知棱柱下底的顶点的水平投影A_1、B_1、C_1和D_1以及棱柱上底一个顶点的两个投影C_1^1和C_2^1，而棱柱的下底位在平面$\Sigma(q \parallel r)$上（图138）。求作四棱柱$ABCDA^1B^1C^1D^1$的两个投影，并在棱面CC^1DD^1上取一任意点M。

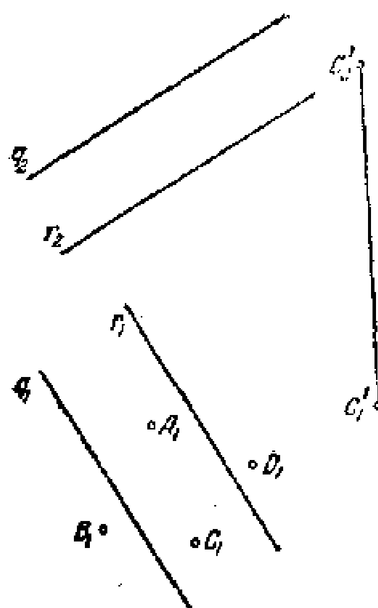


图 138

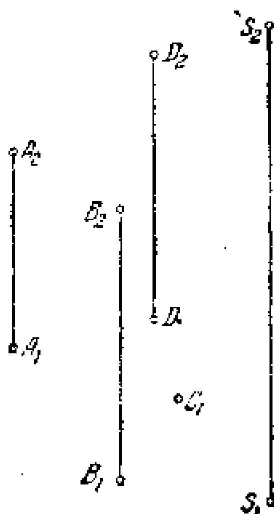


图 139

2. 已知棱锥顶点的水平投影S_1、A_1、B_1、C_1和D_1以及正面投影S_2、A_2、B_2和D_2（图139）。求作四棱锥$SABCD$的两个投影，并在棱面ABS上取一任意点M。

3. 求作四面体$SABC$被平面$\Sigma(a, M)$所截得的截面（图140）。

4*. 试用亲似对应的特性解上题。

5. 求作直线q与多面体A的表面的贯穿点（图141）。

6. 求作两多面体的交线，并编制一个指明交线顶点连接次序用的辅助表格（图142）。

7. 求作塔楼与主楼屋顶的交线（图143）。

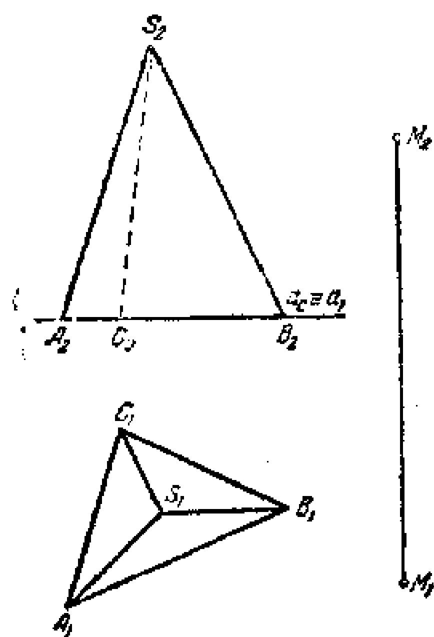


图 140

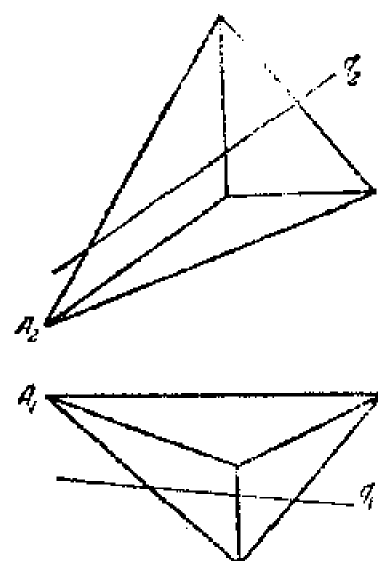


图 141

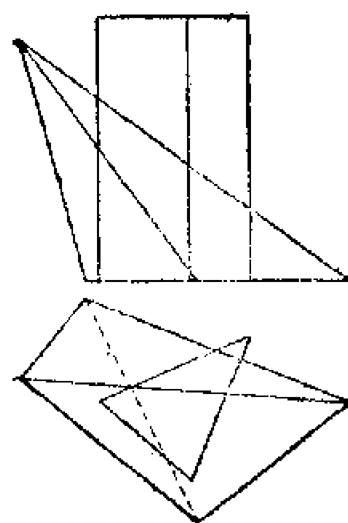


图 142

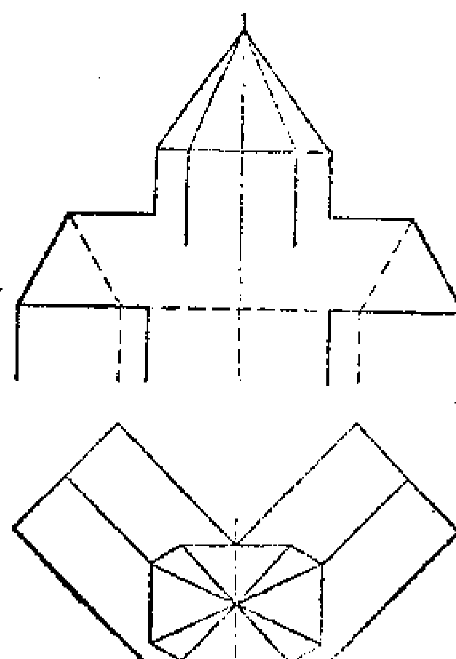


图 143

第四章　垂线和度量问题

§1. 基本概念和定义·垂线定理

1. 在解决工程实践中的各种问题时，常常会遇到求线段的长度、角度、面积、体积等几何量的问题。

这些问题我们称为度量问题，以别于只与形体在空间的相对位置有关的定位问题。

解决度量问题时，有时要适当地对复合图作某种变换，以便改变被投射物体与投影面的相对位置。这些问题在下一章讨论，在该章中将讲述这种变换方法。

解决许多度量问题时，都要作垂线和垂面。所以必须建立一些法则，作为在复合图上作空间互相垂直的直线和平面的投影时的根据。

2. 先来研究可以用来作垂线的正投影的定理，以及在复合图上判断两直线的原形是否垂直的定理。

定理1. 为了使直角正投射为直角，必要和充分的条件是：它至少有一条边平行于投影面，而另一条边不垂直于该投影面。

证明　充分性。

设直角 BAC 的边 AB 平行于投影面 Π_1（图144）。将角 BAC 正投射到平面 Π_1（$AA_1\perp\Pi_1$，$BB_1\perp\Pi_1$，$CC_1\perp\Pi_1$）。试证明角 $B_1A_1C_1$ 是直角。

根据定理的条件，直线 AB 平行于平面 Π_1。此外，直线 AB 和它的投影 A_1B_1 在一个投射面 $\Theta(ABB_1)$ 上。由此得出：直线 AB 与 A_1B_1 互相平行（$AB\parallel A_1B_1$）。

其次，已知直线 AA_1 垂直于平面 Π_1，因此，$AA_1\perp A_1B_1$，又因 $AB\parallel A_1B_1$，所以 $AB\perp AA_1$。

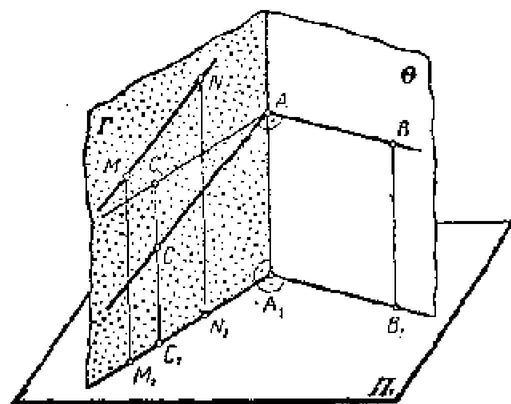


图　144

这样，直线 AB 垂直于直线 AA_1 和 AC，即直线 AB 垂直于位在平面 $\Gamma(CAA_1)$ 上的两直线，所以它垂直于平面 Γ 本身。而作为平行于 AB 的直线 A_1B_1，也垂直于平面 $\Gamma(CAA_1)$。所以直线 A_1B_1 垂直于直线 A_1C_1，即角 $B_1A_1C_1$ 为直角（$\angle B_1A_1C_1=90°$）。

必要性。

根据定理的条件有：

$$\angle BAC=90°,\ \angle B_1A_1C_1=90°,\ AA_1\perp\Pi_1。$$

假定，直角 BAC 的边 AC 不平行于平面 Π_1。

试证明在这种情况下，边 AB 必然平行于平面 Π_1。

为了证明这个问题，先仔细观察投射面 Θ $(AB\subset\Theta)$ 和 Γ $(AC\subset\Gamma)$（参看图 144）。因为直线 AC 不平行于平面 Π_1，也就不平行于直线 A_1C_1。那么过平面 Γ 上的点 A 就可引直线 $AC'\parallel A_1C_1$。

因为直线 A_1C_1 垂直于平面 Θ 上的两直线 A_1B_1 $(\angle B_1A_1C_1=90°)$ 和 AA_1 $(AA_1\perp\Pi_1)$，所以它也垂直于平面 Θ，即 $A_1C_1\perp\Theta$。直线 AC' 平行于直线 A_1C_1，因而它也垂直于平面 Θ：$(AC'\perp\Theta)$。

由此推出直线 AC' 垂直于平面 Θ 的任何直线。其中包括 $AC'\perp AB$。但直线 AC 也垂直于 AB $(\angle BAC=90°)$。

因此，直线 $AB\perp\Gamma$。

另一方面，直线 A_1B_1 垂直于直线 A_1C_1（因为 $\angle B_1A_1C_1=90°$）和 AA_1（因为 $AA_1\perp\Pi_1$）。因此，直线 $A_1B_1\perp\Gamma$。因而垂直于同一平面 Γ 的直线 AB 和 A_1B_1 互相平行。结果，AB 平行于平面 Π_1。

3. 刚才证明的定理是关于直角的投射，即两条互相垂直的相交直线的投射问题。但是也可以将它们推广到交叉两直线上，这时只要考虑到交叉两直线（例如，直线 $MN\perp AB$，参看图 144）的夹角，就是过空间任意一点 A 作出的、分别与已知交叉两直线平行的两直线（$AC\parallel NM$）所夹的平面角（$\angle CAB=90°$）。

将所得的结论用于复合图上的投影时，可以这样说：两条互相垂直的直线（相交的或交叉的），只有当这两条直线中至少有一条是水平线时，它们在水平投影面上的垂直关系才能保持不变。

对于正立投影面和侧立投影面的条件可作同样的表述。

图 145、146 和 147 表示在复合图上互相垂直的直线：$a\perp h$，$b\perp f$ 和 $c\perp p$，其中 a、b 和 c 是一般位置直线，而 h，f 和 p 是等距线。在各图的左边的两直线是相交的，而右边的两直线是交叉的。

应该注意，在第二个投影面上，由于不满足定理 1 的条件，投射后直角图形失真。

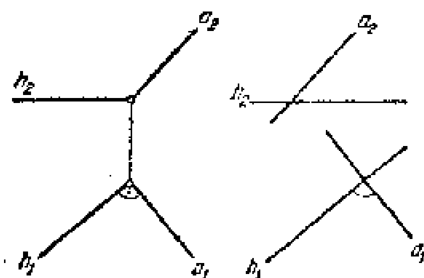


图 145

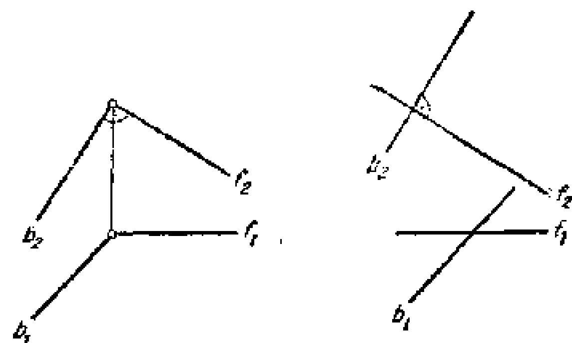
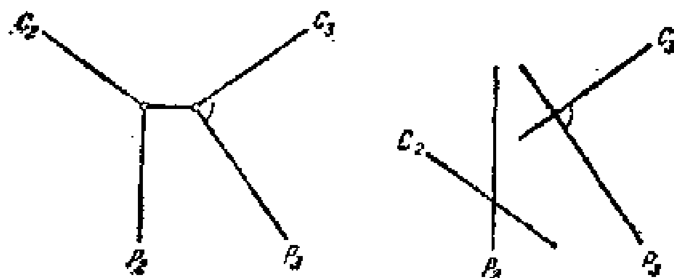
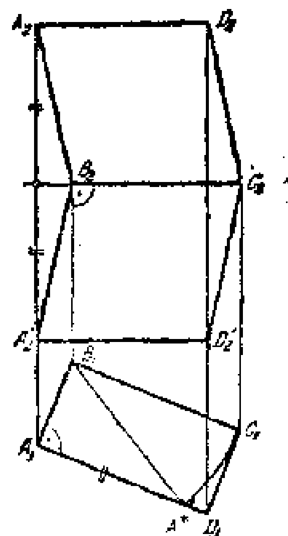


图 146


图 147


图 148

4. **例** 已知正方形的水平投影(矩形 $A_1B_1C_1D_1$)和点 B_2，求作正方形的正面投影(图 148)。

根据定理 1，只有正方形有一条边平行于平面 Π_1，也就是它有一对对边为水平线时，正方形才可能在平面 Π_1 上投射为一个矩形。因为正方形的这对对边在 Π_1 上投射为实长，所以它们只能是边 BC 和 AD，而不是 AB 和 CD，因为 $A_1B_1<B_1C_1$。作 $B_2C_2\perp B_1B_2$，即得边 BC 的正面投影。

有了正方形的边 AB 的实长(B_1C_1)及其水平投影 A_1B_1，就不难作出它的正面投影。为此，在直角边 A_1B_1 上作一个斜边为 $B_1A^*=B_1C_1$[①] 的直角三角形 $A_1A^*B_1$。于是线段 A_1A^* 等于点 A 和 B 的高度差，因而也等于在正面投影上的点 A_2 和 B_2 的高度差。从直线 B_2C_2 向上或向下截取长度为 A_1A^* 的线段，沿连系线便找到点 A 的投影 A_2 和 A_2'，然后作平行四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 和 $A_2'B_2C_2D_2'$，就得到满足于已知条件的两个解(参看图 148)。

§2. 任意角的正投影

在上一节研究过**直角**的正投射问题之后，我们可以肯定，只有当直角有一条边平行于投影面时，直角才投射为直角。否则，直角就投射为钝角或锐角。自然会提出这样的问题：正投射一个**任意角**时，这个角的大小会起什么变化。定理 2 回答了这个问题[②]。

定理 2 可以将任意角 $\omega(0<\omega<180^\circ)$ 看作是任一已知角 $\theta(0<\theta<180^\circ)$ 的正投影。

由这个定理可以得出，不仅平面角，而且当角的两条边平行于投影面时，锐角和钝角的投影也可以等于被投射的角。

§3. 最大斜度线

1. 在每一个平面的所有直线中，存在一些对投影面倾角最大的直线，这些直线称为对投影面的最大斜度线。

利用作**最大斜度线**，可以解决确定已知平面与投影面间所夹**两面角**的大小这一度量问题。所

① 参看第二章 §5 之 4。

② 定理的证明参看 Н. Ф. 切特维鲁新等《画法几何教程》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1956 年版。

Н. Ф. 切特维鲁新对被投射角 θ 的可能位置所作的详细分析，参看 Н. А. 波波夫《画法几何教程》第 191 页，莫斯科－列宁格勒，国家技术理论书籍出版社，1947 年版。

指的两面角等于最大斜度线与相应的投影面所构成的直线角，更准确地说是最大斜度线与它在这个平面上的投影间所夹的直线角。

现在来证明下面的定理：

定理 3. 平面上垂直于该平面的等距线的直线，就是最大斜度线。

设有一个一般位置平面 Λ（图 149），与水平投影面 Π_1 相交于迹线 m，在这个平面上引一条垂直于水平线 h 的直线 AB_1（$AB_1 \perp h$）。

试证明这样作出的直线 AB_1 对投影面 Π_1 的倾角，与平面 Λ 上其余直线对 Π_1 的倾角相比较是最大的。

垂直于直线 h 的直线 AB_1 也垂直于平面的迹线 m（$AB_1 \perp m$）。

直线 AB_1 对平面 Π_1 的倾角是由该直线及其在平面 Π_1 上的投影所夹的角来确定的。作 $AA_1 \perp \Pi_1$。这时 $\angle\varphi = \angle AB_1A_1$ 就是所求的直线 AB_1 对平面 Π_1 的倾角。

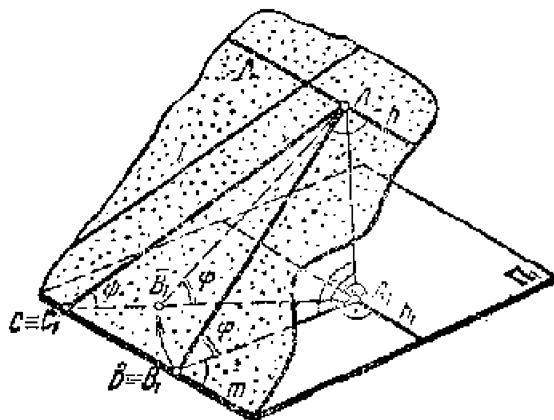


图 149

还要指出，根据定理 1，斜度线 AB_1 的投影 A_1B_1 应当垂直于直线 m 和 h_1。

现在在平面 Λ 上过点 A 引一任意直线 AC_1，这条直线不与直线 AB_1 重合而与平面 Π_1 构成角 $AC_1A_1=\psi$。试证明 $\varphi>\psi$。

为此，先研究具有公共直角边 AA_1 的两个直角三角形 $\triangle AA_1B_1$ 和 $\triangle AA_1C_1$。

在这两个三角形中，$A_1B_1<A_1C_1$，因为从点 A_1 到直线 m 的垂线 A_1B_1 短于过点 A_1 到同一直线的所有斜线。其次，如果将边 A_1B_1 绕直线 AA_1 旋转而使研究中的两个三角形平面叠合在一起，就得到 $\angle A\bar{B}_1A_1=\varphi$ 大于 $\angle AC_1A_1=\psi$，因为 $\angle A\bar{B}_1A_1$ 是 $\triangle AC_1\bar{B}_1$ 的外角。

这就证明了角 $\varphi>\psi$，即在平面 Λ 上垂直于该平面的水平线 h 的直线 AB_1，实际上就是对水平投影面 Π_1 的最大斜度线①。

上面已经说过，最大斜度线 AB_1 的水平投影 A_1B_1 垂直于 h_1（$A_1B_1 \perp h_1$）。

2. 同样可以证明，在平面 Λ 上垂直于该平面的正平线的直线，是对正立投影面 Π_2 的最大斜度线。这条最大斜度线的正面投影垂直于平面 Λ 的正平线的正面投影。

最大斜度线又称为倾斜线或坡线。

将平面 Λ 上对水平面的最大斜度线称为"坡线"是有理由的，因为一个有重量的质点正是沿着这条直线 AB_1 从平面 Λ 上滑下来的。对平面 Π_2 和 Π_3，则采用"最大斜度线"这一名称较为合理。

3. **例 1** 给出三角形 ABC 的投影。求作对水平投影面和正立投影面的最大斜度线，并确定平面 ABC 对平面 Π_1 和 Π_2 的倾角（图 150）。

---

① 这里所作的证明具有普遍意义，因为对平面 Λ 上的任意直线 l 来说，总可以过点 A 引一直线与它平行（$AC_1 /\!/ l$）。

为了作最大斜度线，应该先作等距线。我们作出水平线 h (h_1, h_2)：

$$B_2G_2 \perp B_1B_2;\quad B_2G_2 \equiv h_2;\quad B_1G_1 \equiv h_1。$$

考虑到垂直于水平线的直线在水平投影中仍保持垂直，所以作出对平面 Π_1 的坡线的水平投影：($C_1S_1 \perp B_1G_1$)。这条坡线的正面投影是 S_2C_2。

直线 CS (C_1S_1, C_2S_2) 就是对水平投影面 Π_1 的**坡线**。

为了作对平面 Π_2 的最大斜度线，先作正平线 f (f_1, f_2)：

$$B_1F_1 \perp B_1B_2;\quad B_1F_1 \equiv f_1;\quad B_2F_2 \equiv f_2。$$

然后作最大斜度线的正面投影 A_2T_2：$A_2T_2 \perp B_2F_2$，再作它的水平投影 A_1T_1。

所作的直线 AT (A_1T_1, A_2T_2) 就是对平面 Π_2 的**最大斜度线**。

显然，通过平面上每一点只有一条对水平面的坡线和一条对正平面的最大斜度线，因为过平面上每一点只能作一条水平线的垂线和一条正平线的垂线。

为了确定平面 ABC 与投影面 Π_1 和 Π_2 的夹角，只要求出最大斜度线 CS 和 AT 与有关平面 Π_1 和 Π_2 的夹角就可以了。

先确定直线 CS 与平面 Π_1 的夹角 φ（参看图 150）。为此，在直角边 C_1S_1 上作一个直角三角形 $C_1S_1S^*$①，该三角形的第二条直角边 S_1S^* 等于线段 e——点 C 和 S 的高度差。

作出第二个直角三角形 $A_2T_2T^*$，使直角边 T_2T^* 等于线段 v，v 为点 A 和 T 的深度差，就求得直线 AT 对平面 Π_2 的倾角 ω。

角 φ 和 ω 即为所求，它们确定了平面 ABC 对投影面 Π_1 和 Π_2 的倾角。

应该注意，只要在图上给出平面对水平投影面或正立投影面的坡线的投影，就足以决定那个平面的本身。

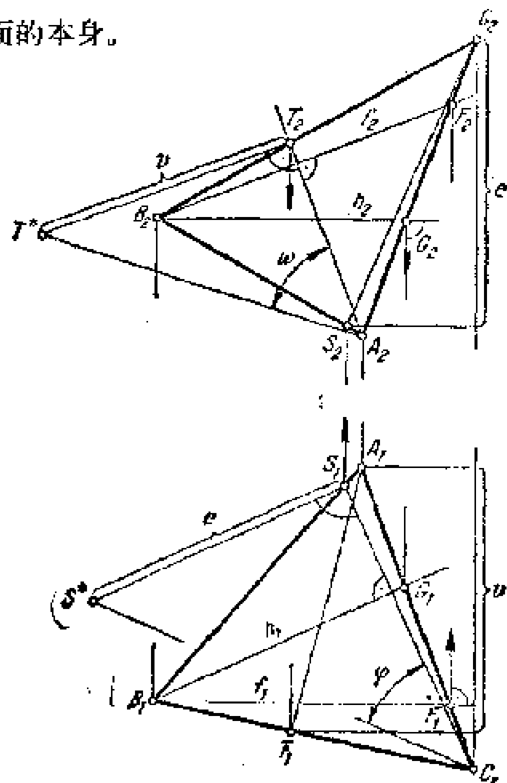


图 150

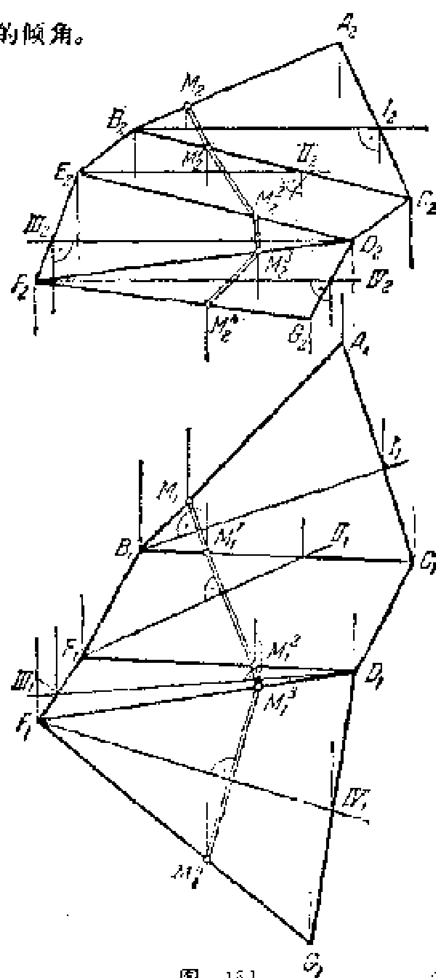


图 151

① 参看第二章§5。

例 2 试作出一个有重量的小球从点 M 沿多棱面 $ABCDEFG$ 滚落时的运动轨迹(图 151)。

显然,小球的运动轨迹是多棱面上的某一条折线。这折线的每一段就是各棱面对平面 Π_1 的坡线的线段。

为了作出所求的折线,首先在已知多棱面的各棱面上作水平线 BI、EII、$DIII$、FIV,然后引 $M_1M_1^1 \perp B_1I_1$、$M_1^1M_1^2 \perp E_1II_1$、$M_1^2M_1^3 \perp D_1III_1$ 和 $M_1^3M_1^4 \perp F_1IV_1$,即作出轨迹的水平投影,此后作出各点的正面投影 M_2^1、M_2^2、M_2^3 和 M_2^4。

所得的折线 $MM^1M^2M^3M^4$ 就是所求的小球沿多棱面滚落时所求的迹轨。

§4. 直线与平面垂直

1. 在解度量问题时常常要在复合图上作平面的法线的投影。这就要求搞清一些特征,使得根据这些特征就可以从复合图判断出直线与平面在空间是否垂直;或反过来,可以在图上作出在空间垂直的直线和平面。

由立体几何知道,如果直线垂直于一平面上的两条相交直线,则此直线垂直于该平面。

在复合图上,直线与平面垂直的特征可由下列定理确定。

定理 4 为了使直线 n 垂直于平面 P,必要和充分的条件是:直线的水平投影垂直于平面 P 的水平线的水平投影,直线的正面投影垂直于平面 P 的正平线的正面投影。

证明　必要性。

假设直线 n 垂直于平面 P(ABC)(图 152, a)。于是,大家知道,这条直线垂直于平面 P 上的任意直线,其中包括平面 P 上任意的水平线和正平线。

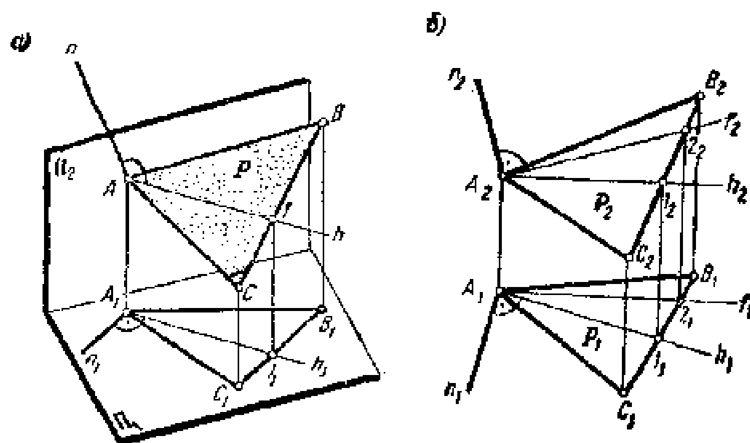


图　152

根据定理 1,直线 n 和水平线 h 的垂直性在水平投影中保持不变($n_1 \perp h_1$)(参看图 152, a),而直线 n 和正平线 f 的垂直性在正面投影中也保持不变($n_2 \perp f_2$)(在图 152, a 上没有表示出来)。

充分性。

假设在复合图上,直线 n 的水平投影垂直于水平线的水平投影($n_1 \perp h_1$),而它的正面投影垂直于正平线的正面投影($n_2 \perp f_2$)。于是,根据定理 1,直线 n 在空间垂直于直线 h 和 f ($n \perp {}^h_f$)。

这样一来,直线 n 垂直于平面 P 上两条相交直线,因而垂直于平面 P 本身($n \perp$ P)。

2. 定理4所确定的直线与平面垂直的特征，使我们可以在复合图上作出平面的法线的投影。譬如，在图152，б上给出了在平面P上点$A(A_1, A_2)$处的法线$n(n_1, n_2)$的作法。法线的投影垂直于等距线的相应投影：$n_1 \perp h_1$和$n_2 \perp f_2$。显然，在侧面投影中直线n与侧面等距线p的投影也垂直($n_3 \perp p_3$)。

3. 利用作平面的法线的方法可解决如下的问题：将一个已在复合图上给出其投影的图形正投射到已知的一般位置平面上。

这个问题的解归结为将任意点M投射到一般位置平面Σ上。为此必须分两步进行：1）过点M作一直线垂直于平面Σ；2）找出此直线与平面Σ的交点M'。

这样，点M'就是点M在平面Σ上的投影。这个投影称为辅助投影。

4. 阐明了直线与平面垂直的条件之后，我们来研究条件一直线或一平面对另一平面（特别是对投影面）倾斜一定角度的问题。

现在来研究几个例子。

例1 作直线的投影，使该直线通过点A且对平面Π_1的倾角为θ，而对平面Π_2的倾角为φ。并说明此问题有解的条件。

解题（图153）的根据是，所求的直线应当是正圆锥面的一条母线，该圆锥面的旋转轴$i \perp \Pi_1$，而它的母线与底平面所成的角为θ。

母线AB在Π_2上投射为实长($A_2B_2 = AB$)。已知母线实长及它对Π_2的倾角φ，就可确定它的正面投影。为此，过锥顶A_2作一直线与A_2B_2之夹角为φ，又过点B_2作垂线B_2C_0垂直于A_2C_0，则线段A_2C_0就是所求的圆锥母线正面投影的长度，该母线对Π_2的倾角即为φ。以A_2为圆心，A_2C_0为半径作圆弧，交圆锥底面的投影于点C_2和D_2，即得满足所提条件的四条圆锥母线(AC、AD、AE和AF)①。

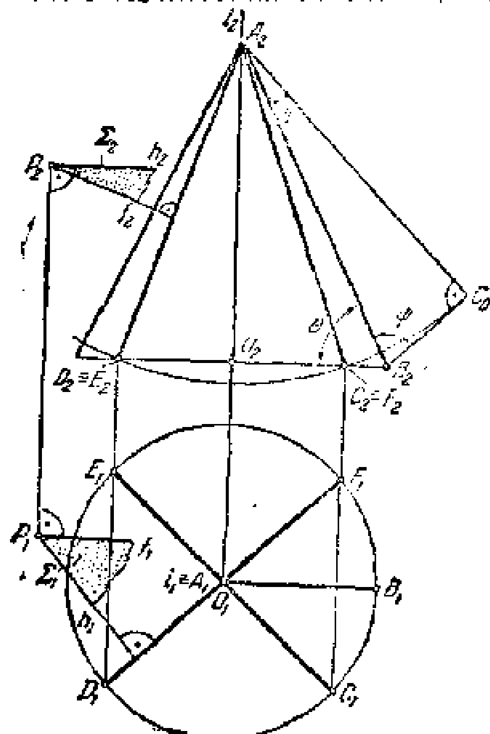


图 153

现在来探讨角θ和φ的关系。不难证明，对于一般位置直线，$\theta+\varphi<90°$。实际上，直角三角形$A_2B_2O_2$和$A_2B_2C_0$具有公共斜边A_2B_2（参看图153）。在这两个三角形中，由于直角边$A_2C_0 = A_2C_2$大于直角边A_2O_2，所以$\psi>\theta$。考虑到$\psi = 90°-\varphi$，即得$90°-\varphi>\theta$，或者

$$\theta+\varphi<90° \qquad (1)$$

如果取$\theta+\varphi=90°$，就得到侧平线，因为在这种情况下，$\theta=\psi$和$A_2C_0=A_2O_2$。

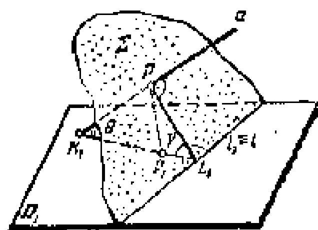


图 154

① 图153上画出的平面$\Sigma(h\times f)$是属于例2的。

例 2 过点P作一平面Σ，使与投影面Π_1和Π_2成倾角γ和δ，并说明此问题有解的条件。

如果平面Σ对平面Π_1的倾角为γ(图 154)，而直线$a \perp \Sigma$且对Π_1的倾角为θ，则

$$\gamma-\theta=90^\circ \tag{2}$$

因为三角形L_1PK_1是具有直角P的直角三角形。至于平面Σ和直线a对平面Π_2的倾角显然也有同样的关系：

$$\delta+\varphi=90^\circ \tag{3}$$

这样，为了作出对Π_1和Π_2的倾角为γ和δ的平面Σ，应先作一直线a，使它对Π_1和Π_2的倾角为$\theta=90^\circ-\gamma$和$\varphi=90^\circ-\delta$，然后过已知点P作平面$\Sigma \perp a$。

这个问题有四个解。图 153 作出了其中一个可能的平面$\Sigma \perp AD$。在图上，平面Σ是由相交的水平线和正平线给出的。其余三个平面将分别垂直于直线AC、AE和AF。

现在来探讨角γ和δ之间的关系。为此，把等式(2)和(3)两边逐项相加，就得到$(\gamma+\delta)+(\theta+\varphi)=180^\circ$，由此，$\gamma+\delta<180^\circ$。另一方面，$\theta+\varphi<90^\circ$[参看式(1)]，因此，$\gamma+\delta>90^\circ$。

这样，对于一般位置平面来说，我们有：

$$90^\circ<\gamma+\delta<180^\circ。$$

对于侧面投射面，可得$\gamma+\delta=90^\circ$，而对于侧平面，则得$\gamma+\delta=180^\circ$。

§ 5. 圆的正投影

1. 大家知道，**圆的平行投影是一条曲线**，称为椭圆[①]。因为**正投影**是平行投影的**特殊情况**，所以十分明显，圆的正投影也是椭圆。

椭圆的这样一个定义，使我们能够用圆在正投影中保持不变的那些性质来确定椭圆的性质。

假设在一般位置平面Ω上有一个圆心为O，直径$d=2R$的圆(图 155)。将这个圆正投射到水平面Π_1上，再来研究所得椭圆的基本性质。

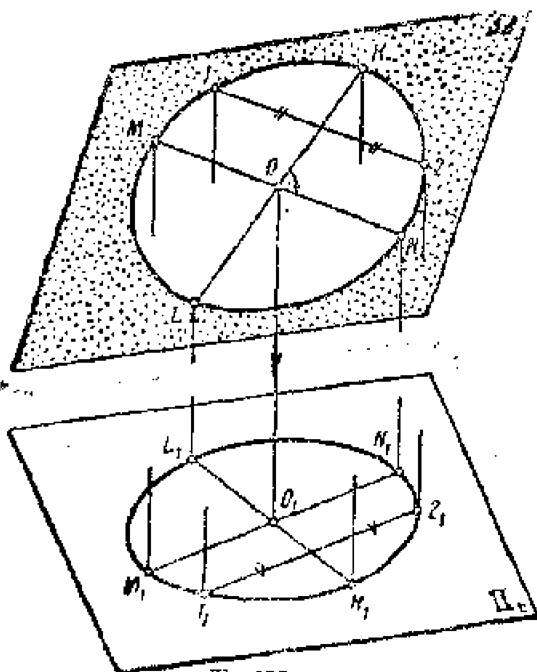


图 155

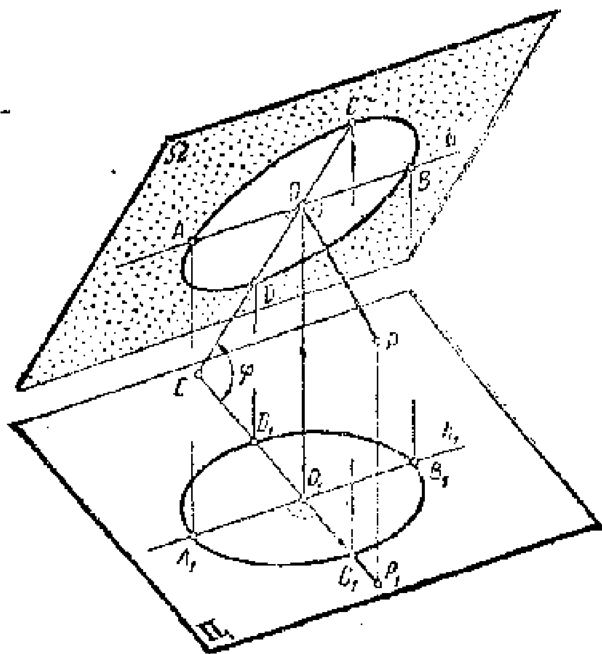


图 156

① 作为圆的平行投影的椭圆，其性质在第一章 § 4 和 § 5 中有更详细的论述。

圆的任意两条互相垂直的直径 MN 和 KL 投射为椭圆的两条直径 M_1N_1 和 K_1L_1。但是根据定理 1（参看本章 § 1），两条一般位置直线所夹的直角 KON 在投影中不是保持不变的，因而椭圆的直径 M_1N_1 和 K_1L_1 不互相垂直。

同时，圆的直径 MN 和 KL 的**共轭性在投影中保持不变**，因而线段 M_1N_1 和 K_1L_1 就是椭圆的两条共轭直径①。

圆的一对共轭（互相垂直的）直径的集合在投射时确定椭圆的类似的一对共轭直径的集合。

2. 我们来求椭圆的轴，它是椭圆的**一对**共轭并互相垂直的直径。

为此，在圆上选取这样的一对互相垂直的直径 AB 和 CD，其中之一，例如 AB，平行于平面 Π_1，即它是**水平线**（图 156）。显然，垂直于 AB 的另一条直径 CD 就是平面 Ω 上对平面 Π_1 的**坡线**。

在这种情况下，根据定理 1，直角 AOD 在平面 Π_1 上投射为**实形**，因而在投影中就求得椭圆的**一对共轭并互相垂直的直径**（$A_1B_1 \perp C_1D_1$），即椭圆的轴②。

3. 现在来求**椭圆轴的大小**。椭圆的**长轴** A_1B_1 是位在等距线上的直径 AB 的投影，因此它等于线段 AB 的实长，即等于**圆的直径**：$A_1B_1 = AB = d$。

椭圆的**短轴** C_1D_1 是位在平面 Ω 的坡线上的直径 CD 的投影。坡线与它在平面 Π_1 上的投影的夹角 CEC_1 是平面 Ω 和 Π_1 夹成的两面角的直线角 φ（$\angle CEC_1 = \varphi$）。

于是 $C_1D_1 = CD \cdot \cos\varphi$，但 $CD = AB = d$，所以 $C_1D_1 = d \cdot \cos\varphi$。

4. 不难证明，在平面 Π_1 上的椭圆投影的短轴与过点 O 所作的平面 Ω 的法线的投影重合（参看图 156）。

事实上，根据定理 4，平面 Ω 的法线 OP 的水平投影 O_1P_1 应当垂直于水平线的水平投影（$O_1P_1 \perp h_1$）。换句话说，**法线 OP（O_1P_1）的投影与椭圆短轴的方向重合**（$O_1P_1 \equiv D_1C_1$）。

5. **圆的水平投影**是椭圆这个结论，对正立投影面和侧立投影面显然也是正确的。在这些情况下，全部措词将以**正面等距线**和**侧面等距线**来代替**水平等距线**。

最后的结论可叙述成下列定理。

定理 5 如果圆所在的平面 Ω 对投影面的倾角为 φ，则圆的正投影为椭圆，其长轴等于圆的直径 d，且平行于平面 Ω 上的等距线的投影，而短轴等于 $d \cdot \cos\varphi$，且平行于平面 Ω 的垂线的投影。

6. 试研究所得椭圆的**轴线比**：

$$\frac{C_1D_1}{A_1B_1} = \cos\varphi = \text{常数}。 \tag{4}$$

对已知平面 Ω 和 Π_1 来说（对于 Ω 和 Π_2 或 Ω 和 Π_3 也一样），角 φ 和 $\cos\varphi$ 是常数。因此 $\cos\varphi$ 可以用作表示**椭圆特征的轴线比**，而这个比，正如解析几何中所指出的，也表示了**椭圆形状**

---

① 提醒一下：如果两条直径中的每一条都等分平行于另一条直径的所有的弦，则这两条直径称为共轭直径（参看第一章 § 4）。

线段的等分在投影中是保持不变的（参看"绪论" § 1），因而椭圆直径的共轭性也保持不变。

② 关于作为圆的任意投影的椭圆的轴线问题，参看第一章 § 5。

的特征。

于是，不管圆在平面Ω上占有什么位置，在平面 Π_1 上总得到同一形状的椭圆。

应当指出，当角φ给定之后，不仅椭圆的形状不变，而且椭圆轴的位置也不会随着圆的尺寸和圆在平面Ω上的位置而改变：在平面 Π_1 上，椭圆的长轴总是平行于等距线的投影，而短轴则平行于坡线的投影。

如果角φ增大，则长轴不变的椭圆，形状变得越来越扁。在极限情况下，角φ变为90°，而 $\cos\varphi=0$，即当平面Ω垂直于平面 Π_1 时，圆将投射为一直线段(参看图 156)。

如果 $\cos\varphi=1$，则平面Ω平行于投影面，投影椭圆变成圆。

7. 阐明了作为圆的正投影的椭圆的基本性质之后，我们就可以转到在复合图上作圆的投影的问题。

这时应当研究具有半径 R 的圆在空间的三种特征位置：

1) 位在等距面上的圆，在一个投影面上投射为圆，而在另一个投影面上投射为长度等于 $2R$ 的直线段；

2) 位在投射面上的圆，在一个投影面上投射为椭圆，而在另一个投影面上投射为长度等于 $2R$ 的直线段；

3) 位在一般位置平面上的圆，在两个投影面上都投射为椭圆。

我们只研究后面两种情况，因为第一种情况已不需进一步说明。

设圆心在点 O，半径为 R 的圆，位在正面投射面 $E(E_2)$ 上(图 157, *a*)。选取圆的两条互相垂直的直径 AB 和 CD，其中 $AB \parallel \Pi_2$，而 $CD \parallel \Pi_1$。这样一来，直径 CD 与平面E的水平线重合，而 AB 与平面E对平面 Π_1 的坡线重合。

于是线段 A_1B_1 和 $A_2B_2=AB=2R$ 就是直径 AB 的投影，直径 CD 在 Π_2 上投射为一点 $C_2\equiv D_2\equiv O_2$，而在平面 Π_1 上投射为线段 $C_1D_1=CD=2R$。

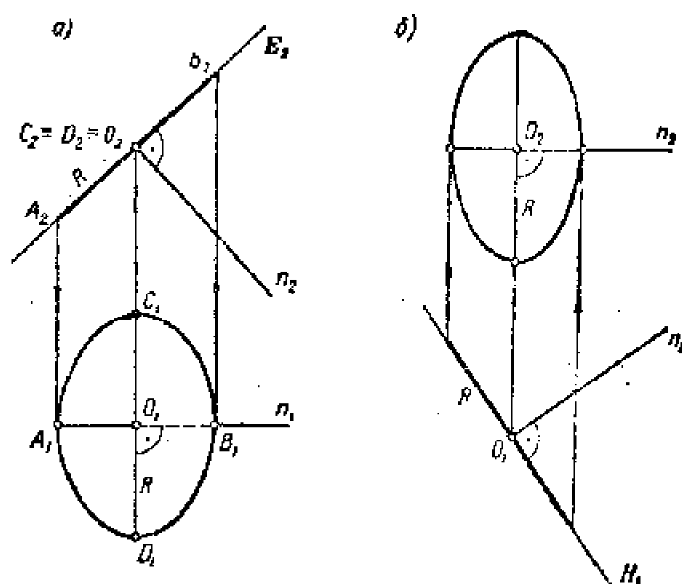


图 157

根据定理 1，直径 AB 和 CD 的垂直性在水平投影中保持不变，因为有一条直径平行于 Π_1 ($CD \parallel \Pi_1$)。因此，根据定理 5，线段 A_1B_1 和 C_1D_1 是椭圆的短轴和长轴，并可用第一章 § 5 中所述的方法作出椭圆(参看图 157, a)。

应该注意，椭圆的短轴 A_1B_1 与平面 E 的垂线的投影 n_1 重合(参看定理 5)。

同样可以作出位在水平投射面 $H(H_1)$ 上的圆的投影(图 157, $б$)。

设给出一个位在一般位置平面 Θ 上的圆，其圆心在点 $O(O_1, O_2)$，半径等于 R，平面 Θ 在图上用过点 O 所引的法线 $n(n_1, n_2)$ 给出(图 158)。

根据定理 5，椭圆的长轴应等于 $2R$ 并平行于平面 Θ 上等距线的投影。这些线在图上是不难作出的。为此，引 $h_2 \perp O_1O_2$ 和 $h_1 \perp n_1$，以及 $f_1 \perp O_1O_2$ 和 $f_2 \perp n_2$。于是，为了确定正面投影上的椭圆的长轴 A_2B_2，只要沿正平线 f_2 截取线段 $O_2A_2 = O_2B_2 = R$；水平投影上的椭圆的长轴 C_1D_1 也等于 $2R$ 并沿着直线 h_1 配置。

圆的直径 AB 和 CD 的第二个投影 A_1B_1 和 C_2D_2 不难沿着连系线求出(参看图 158)。

现在来求椭圆(圆的正面投影)的短轴，这个椭圆由长轴 A_2B_2 和椭圆上一点 D_2 给出。

为此，必须进行下列的作图①：作一个中心为 O_2 和半径为 R 的圆；引直线 $D_21 \parallel n_2$ 到与圆交于点 1；连接点 O_2 和 1；引 $D_22 \parallel f_2$ 并标出点 $2 = D_22 \times O_21$。线段 O_22 确定椭圆短半轴的长度，短轴的方向由直线 n_2 确定。

水平投影上的椭圆，其短轴也可根据同一理由用同样的方法作得。

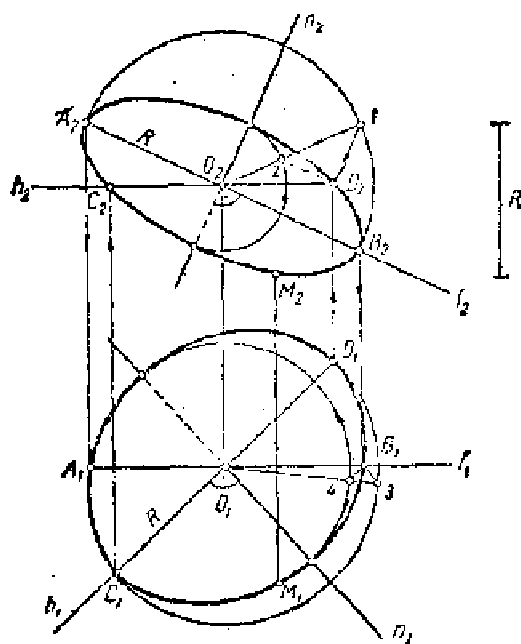


图 158

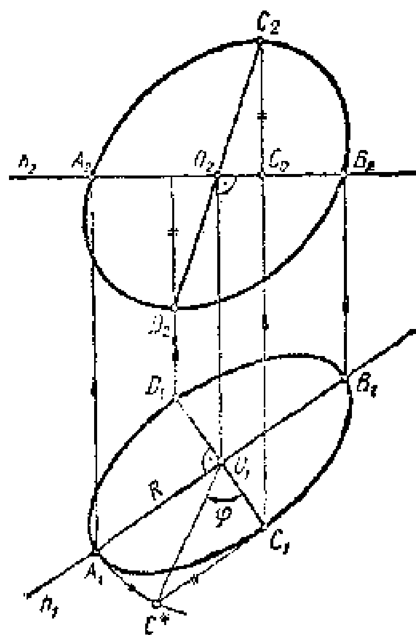


图 159

8. 试研究一个例子。如果已知中心在点 $O(O_1, O_2)$ 的圆的水平投影为椭圆，其轴线为 A_1B_1 和 C_1D_1(图 159)，试作出圆的正面投影。

根据定理 5 可以断定，在 Π_1 上投射为椭圆长轴的圆直径 AB 是水平地放置的。所以，引 $h_2 \perp O_1O_2$，沿连系

① 参看第一章 § 5。

线求出线段 A_2B_2——直径 AB 的正面投影。

为了作出直径 CD 的正面投影 C_2D_2 可进行如下：作直角三角形 $O_1C_1C^*$，它的一直角边 O_1C_1 等于椭圆的短半轴(圆的半径的投影)，而斜边 O_1C^* 等于椭圆的长半轴(圆的半径实长)①。于是第二条直角边 C_1C^* 表示点 $C(C_2)$ 比点 $O(O_2)$ 高(或低)多少。在过点 C_1 所引的连系线上截取线段 $C_0C_2=C_1C^*$，就求得点 C_2，然后求出点 $D_2$②(参看图 159)。

这样，作出了圆的两条互相垂直的直径 AB 和 CD 的正面投影 A_2B_2 和 C_2D_2，即椭圆的共轭直径，就可以作出椭圆③。

§ 6. 两平面互相垂直·相互垂直的一般位置直线

1. 由立体几何知道，如果两个平面 P 和 Σ 互相垂直，则其中每一个平面必通过另一个平面的垂线，或垂直于另一个平面上的直线。譬如，在图 160 上，平面 Σ 通过垂直于平面 P 的直线 b，而平面 P 也通过垂直于平面 Σ 的直线 a。可以用另一种方式说：平面 P 垂直于平面 Σ 上的直线 b。

直角 AMB 是两个互相垂直的平面 P 和 Σ 所夹两面角的**直线角**。

过空间一点 B 可以作任意多少的平面垂直于已知平面 P (参看图 160)。所有这些平面都通过从点 B 到平面 P 的垂线 b。但过不垂直于平面 P 的直线 m，只能作唯一的一个垂直于平面 P 的平面 $\Sigma(m\times b)$，平面 Σ 可由直线 m 及从直线 m 上任意一点引到平面 P 的垂线 b 给出。

2. 现在来讨论一些例子。

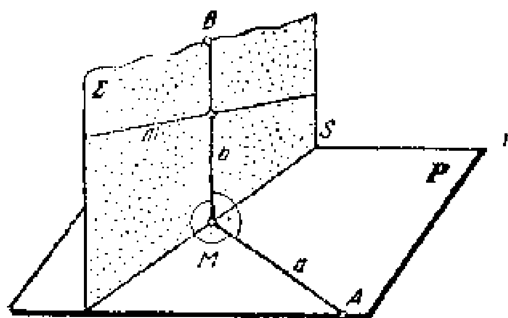


图 160

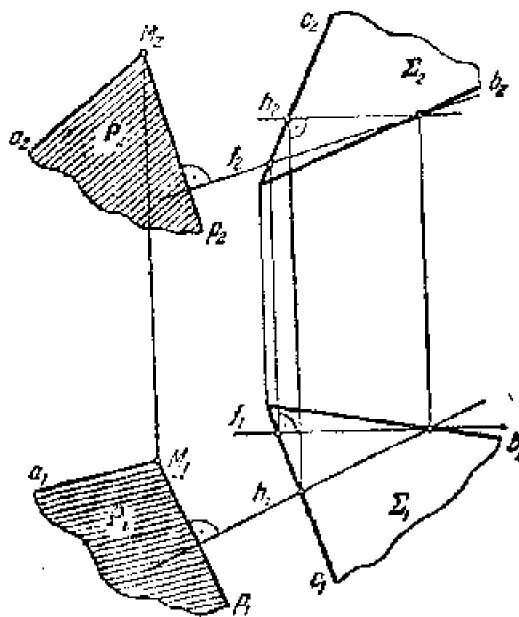


图 161

例 1 过已知直线 a 作一平面 P，使垂直于相交两直线 b 和 c 给出的一般位置平面 Σ(图 161)。

应当过直线 a 上的任意点 M 作平面 Σ 的垂线 p (p_1, p_2)。为此，作出平面 Σ 的水平线 h (h_1, h_2) 和正平线 f

---

① 应该注意，角 $\varphi=\angle C_1O_1C^*$(参看图 159)的余弦等于椭圆的轴线比$\left(\cos\varphi=\frac{O_1C_1}{O_1C^*}\right)$，并确定了圆所在的平面对平面 Π_1 的倾角[参看定理 5 和公式(4)]。

② 如果线段 C_0C_2 由点 C_0 向下截取，就得到问题的第二个解。

③ 根据共轭直径作椭圆的方法参看第一章 § 4 之 6。

(f_1, f_2)、再过直线 a 上的点 $M(M_1, M_2)$ 作 $p_1 \perp h_1$ 和 $p_2 \perp f_2$。

由一对相交直线 a 和 p 确定的所求平面 P，通过平面 Σ 的垂线 p，因此垂直于平面 Σ。

例 2 过已知点 M 作一正面投射面 Γ，使垂直于一般位置平面 Θ，平面 Θ 由三角形 ABC 给出(图 162)。

所求平面 Γ 应当垂直于已知平面 Θ 上的直线。因为平面 Γ 是正面投射面，所以垂直于它的直线显然是正平线。

于是，作平面 Θ 的正平线 $f = AF$，然后过点 M_2 作直线 $\Gamma_2 \perp A_2F_2$。

平面 $\Gamma(\Gamma_2)$ 垂直于平面 Θ 上的直线 $f(f_1, f_2)$，因而垂直于平面 Θ 本身。

从作图中可见，问题只有唯一的解。

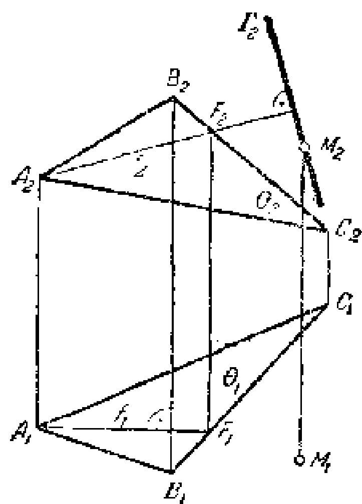


图 162

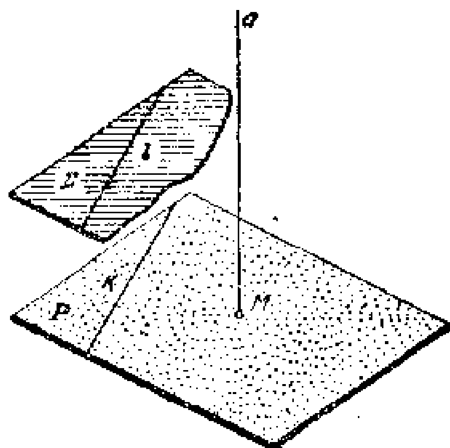


图 163

3. **垂直的两条一般位置直线。两条一般位置直线间所夹的直角投射到两个投影面上图形失真。**因此在作这种直线的投影时，要根据这样的条件，即**两条直线，只有过其中任一条直线都可以作一个平面垂直于其余那条直线时，才是互相垂直的。**

要把这样一个垂直条件应用到复合图上，我们可先从下面的讨论入手：设直线 l 垂直于直线 a(图 163)。于是过直线 l 可以作一个垂直于直线 a 的平面 Σ。这个平面将平行于另一个平面 P，平面 P 通过直线 a 上的点 M 并垂直于直线 a $(\Sigma /\!/ \mathrm{P})$。这样，直线 l 应当平行于平面 P，因而平行于平面 P 内一条直线 k $(l /\!/ \mathrm{P}, l /\!/ k)$。

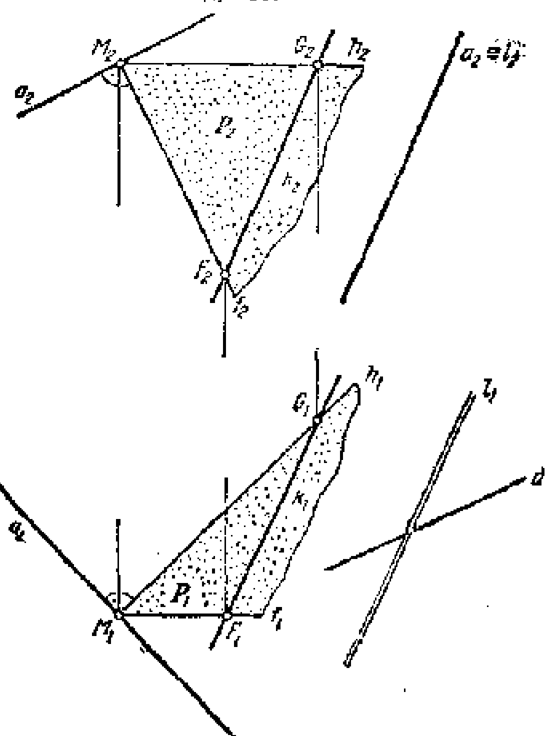


图 164

这样，为了使两条一般位置直线 l 和 a 互相垂直，其必要和充分条件是：这两条直线之一(例如图 163 上的 l)平行于与其余那条直线 a 垂直的平面 P 上的某条直线 k $(l /\!/ k; k \subset \mathrm{P}; \mathrm{P} \perp a)$。

根据以前讲过的两直线平行和直线与平面垂直的特征，利用刚才讨论的关系，就可以在复合

图上作出互相垂直的直线。

4. 设在图上给出交叉两直线 $a(a_1, a_2)$ 和 $d(d_1, d_2)$（图 164）。试判断它们是否垂直？

前面已经确定过，如果直线 d（或 l）平行于平面 P(P⊥a)，或者换句话说，平行于平面 P 上某一直线，则直线 d 垂直于直线 a。

因此，过直线 a 上的任意点 M 作平面 P：(P⊥a)，此平面由等距线 h 和 f 给出。在平面 P 上作直线 $GF \equiv k$，使其正面投影 G_2F_2 平行于 d_2。则直线 d 是否平行于平面 P 就决定于 d_1 是否平行于 G_1F_1，即 d 是否平行于 GF。

在已知情况下，d_1 不平行于 G_1F_1，因此 d 不平行于 P，因而 d 不垂直于 a。

作投影 $l_1 /\!/ G_1F_1$，则得垂直于 a 的某一直线 $l(l_1, l_2)$。

复 习 题

1. 在什么条件下，直角正投射为直角？
2. 角 $\alpha=35°$ 能够成为角 $\beta=120°$ 的正投影吗？（说明这两个角在空间的位置）。
3. 怎样确定圆的"椭圆投影"的轴线方向？它的轴线比等于什么？
4. 在复合图上如何表示直线与平面的相互垂直？（试举一个例子）。
5. 试述两条一般位置直线互相垂直的必要和充分条件。

练 习 题

1. 在图上给出平面 P 对平面 Π_1 的坡线 $m(m_1, m_2)$ 的投影（图 165）。求作平面 P 的投影（用相交两直线给出）。

又设给出平面 P 对平面 Π_2 的最大斜度线 $l(l_1, l_2)$，试解此同一题。

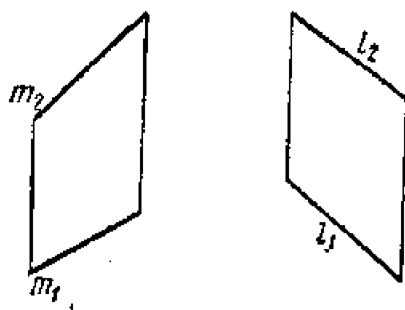


图 165

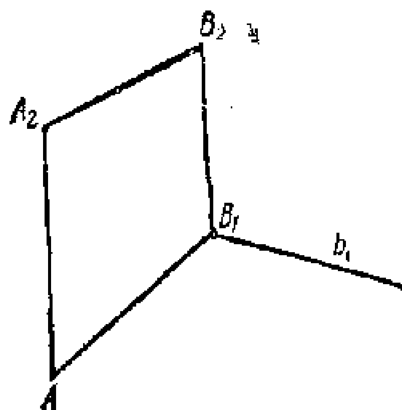


图 166

2. 已知正方形一条边 $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ 的投影和另一条边 b 的水平投影 b_1 的方向（图 166），求作该正方形的投影。

3. 试过三角形 $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ 的边 AB 作一个垂直于平面(ABC)的平面 P($AB \times n$)。

4. 求作直线 $a(a_1, a_2)$ 与投影轴 x_{12} 的公垂线（图 167）。

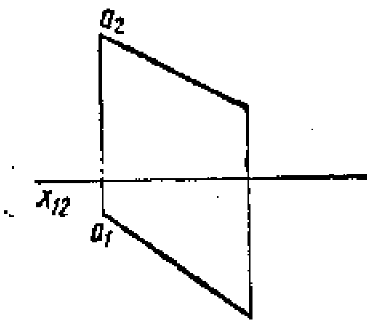


图 167

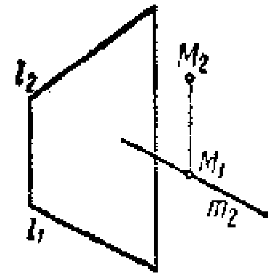


图 168

5. 试作出过点$M(M_1, M_2)$并垂直于已知直线 l (l_1, l_2)的直线m (m_1)的正面投影 m_2(图 168)。

第五章 复合图的变换法及其对解题的应用

§1. 一般知识和定义·更换投影面法

1. 由于已知几何物体(原形体)对投影面处于任意位置而投射到这些平面上图形失真，许多空间问题(定位问题和度量问题)在复合图上的解便常常复杂化。所以，为了使解题简单一些，常采用复合图的变换，使原形体上对我们有用的直线和平面图形由对投影面的一般位置变为**特殊位置**(**投射线、投射面和等距线、等距面**)。

在图上给出**特殊位置**的直线和平面，可使解题大为简化，并能使解题可用最简单的作图来实现。

例如，要从点 $M(M_1, M_2)$ 作一垂线到水平线 $h(h_1, h_2)$，只要作直线 $M_1N_1\perp h_1$(图 169，*a*)，沿着连系线求出点 N_2，并将 N_2 与点 M_2 连接起来就行了。根据已知图形还可直接定出水平线线段 $AB=A_1B_1$ 的实长和水平线与平面 Π_2 的夹角 δ 的实际大小。

如果直线 $a(a_1, a_2)$ 是正面投射线(图 169，*б*)，则不仅容易作出从点 K 到直线 a 的垂线 KL $(K_1L_1, K_2L_2)(K_1L_1\perp a_1)$，而且还可以定出点到直线的距离 $KL=K_2L_2$ 的实长。

当在图上给出**特殊位置平面**时，也可以同样解题。

例如，不难作出从点 $D(D_1, D_2)$ 到水平投射面 $\Lambda(\Lambda_1)$ 的垂线 $DE(D_1E_1,\ D_2E_2)$ 和求出它的垂足 $E(E_1, E_2)$。为此，只要作 $D_1E_1\perp\Lambda_1$ 和 $D_2E_2\perp D_1D_2$ 就行了。这样还同时定出了点到平面的距离(等于线段 D_1E_1)。

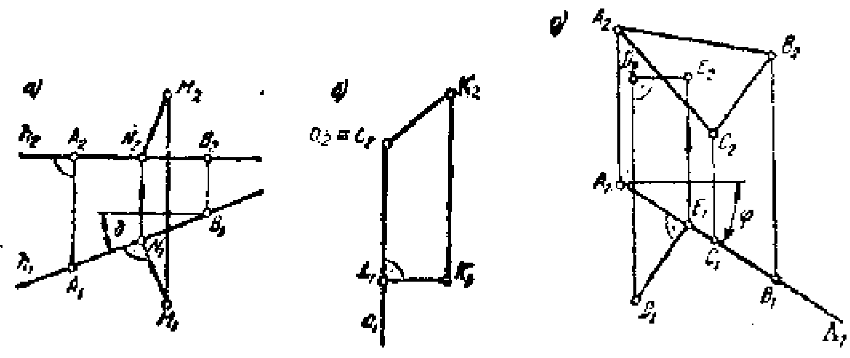


图 169

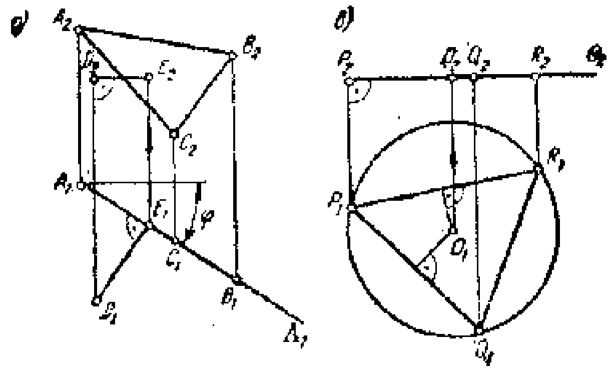


图 170

平面 Λ 与 Π_2 的夹角 φ 可根据图直接定出(参看图 170，*a*)。

当平面图形平行于一个投影面，即它是等距面时，确定它的实形就更加简单。

在图 170，*б* 上，位在水平面 $\Theta(\Theta_2)$ 上的三角形 PQR 投射到平面 Π_1 上不失真 ($\triangle P_1Q_1R_1$ —

$\triangle PQR$)。在平面Θ上的任何作图都可在水平投影上直接进行。例如，如果要画三角形PQR的外接圆，只要画出三角形$P_1Q_1R_1$的外接圆就可以了。

上述例子足以说明使原形体从对投影面的一般位置变为特殊位置的优点。

图形可用下列方法变换：1）改变空间物体对投影面的相对位置，使它从**一般位置**变为**特殊位置**；2）改变**投射方向**（例如正投射改变为斜投射），同时引入新的投影面或仍然保留旧的投影面。

改变物体对投影面体系的**相对位置**，可以采用**两种**基本方法：

1）**更换已知的投影面体系为新的**体系，使保持不动的空间物体对新体系处于特殊位置（更换投影面法）；

2）**移动空间物体**，使它对保持**不变**的投影面体系处于**特殊**位置（平行运动法和旋转法）。

改变投射方向就要在旧的投影面上或者在特别引入的新投影面上作出物体的**辅助投影**（辅助投射法）。

本章将研究所有上述的复合图变换方法，并说明它们的实际应用。

2. **更换投影面法**　更换投影面法的特点是把**已知的平面体系**（"**旧体系**"）转变为两个互相垂直的平面新体系，物体的投影是在已知的体系中给出的，更换时，物体本身的空间位置仍然不变。

许多问题只要更换两个旧投影面之一就得以解决，例如，将平面Π_2更换为水平投射面Π_4（$\Pi_4\perp\Pi_1$）①或将平面Π_1更换为正面投射面Π_5（$\Pi_5\perp\Pi_2$）。

另外有一些问题则需要将**旧体系的两个投影面依次用新的代替**，例如，用平面$\Pi_4\perp\Pi_1$更换平面Π_2，使平面体系（Π_1, Π_2）变为**中间体系**（Π_1, Π_4），然后将平面Π_1更换为平面$\Pi_5\perp\Pi_4$，即得**新的投影面体系**（Π_4, Π_5）以代替旧的体系（Π_1, Π_2）。

应该注意，依次更换两个投影面就可以将**一个任意平面变为投影面**。假定要将某平面Σ变为投影面，可先作平面Π_4垂直于平面Σ和Π_1，然后将Π_1更换为$\Sigma\equiv\Pi_5$（$\Pi_5\perp\Pi_4$）。

在实践中还可能遇到用更换**两次**投影面的方法仍然不能解决的问题。这时平面的更换还可以继续下去，从体系（Π_4, Π_5）变为体系（Π_5, Π_6）等等。

3. **更换一次投影面**　设已知一对投影面Π_1和Π_2（图171，a）。将任意点A投射到这两个平面上，并作出它的投影A_1和A_2。取一新投影面Π_4垂直于平面Π_1，并将点A投射到这个平面上，所得的投影用A_4表示。

前面说过，点在空间的位置由它的**两个投影**（例如，投影A_1和A_2）确定。但是从图171，a可以看出，当投影面Π_1和Π_4给定之后，另外一对投影A_1和A_4也能确定空间的同一个点A。

这样，我们在**旧体系**（Π_1, Π_2）中有点A的投影，在**新体系**（Π_1, Π_4）中也有它的投影。在第一种情况下把它们记为：$A(A_1, A_2)$，在第二种情况下记为：$A(A_1, A_4)$。

显然，**这两个体系是绝对平等的**（两个平面Π_2和Π_4都垂直于平面Π_1）。

---

① 新体系的平面用Π_4、Π_5等表示，以别于旧体系的平面Π_1、Π_2、Π_3。

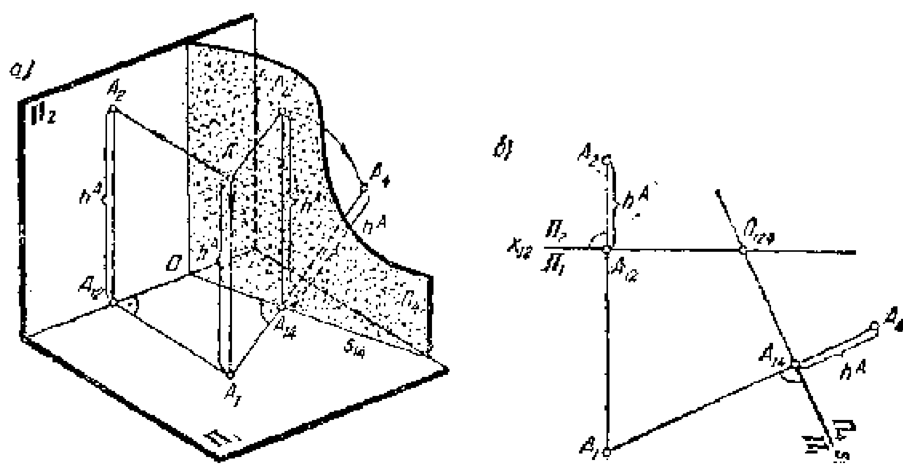


图 171

因此，我们以前对体系(Π_1, Π_2)所确定的特性完全适用于体系(Π_1, Π_4)。问题在于怎样将旧体系中的图形变换为新体系中的图形。为此先要确定当从旧体系转到新体系时，哪些特性保持不变。显然，那些投影特性只与固定的平面 Π_1 有关，即：

1) **点 A 的水平投影 A_1；**

2) **点 A 的高度：$A_1A=A_{12}A_2=A_{14}A_4=h^A$ 保持不变。**

现在来研究在复合图上从体系(Π_1, Π_2)变为体系(Π_1, Π_4)的作图步骤。在图 171, б 上有投影面 Π_1、Π_2，轴 x_{12}，点的投影 A_1、A_2 和点 A_{12}。

引新的投影轴 s_{14}，它确定水平投射面 Π_4 的位置，又过点 A_1 引轴 s_{14} 的垂线并作出点 A_{14}。在所作的垂线上截取线段 $A_{14}A_4=A_{12}A_2=h^A$。这样作出的点 A_4，就是**点 $A(A_1, A_2)$ 在平面 Π_4 上的投影**。

用 O_{124} 表示两条轴的交点(这是三个投影都重合的点)，然后来研究点 A 的旧投影与新投影之间的**连系线**。

因为平面 Π_2 和 Π_4 都垂直于平面 Π_1，所以**投影 A_1 和 A_2 之间的连系线垂直于轴 x_{12}**，即垂直于投影面 Π_1 和 Π_2 的交线($A_1A_2\perp x_{12}$)，而投影 A_1 和 A_4 之间的连系线垂直于平面 Π_1 和 Π_4 的交线，即 $A_1A_4\perp s_{14}$。

我们用新平面 Π_4 代替了**正立**投影面 Π_2 且保持了平面 Π_4 垂直于 Π_1 的要求，亦即它是**水平投射面**。同样，可以用一个新平面 Π_5 代替**水平**投影面 Π_1，这个平面应当是**正面投射面**(图 172)。

因此，我们有了点 $M(M_1, M_2)$ 在旧体系(Π_1, Π_2)中的投影和它在新体系(Π_2, Π_5)中的投影 $M(M_2, M_5)$。

在这种情况下，**下列投影特性保持不变**：

1) 点 M 的正面投影 M_2；

2) 点 M 的深度：$M_2M=M_{12}M_1=M_{25}M_5=v^M$。

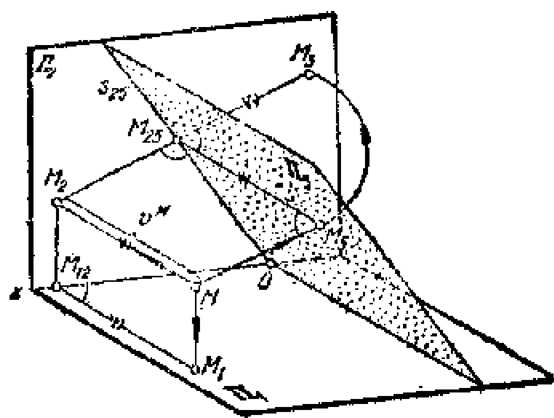


图 172

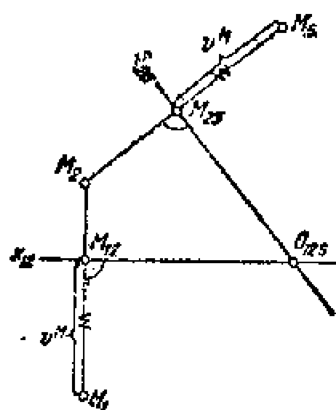


图 173

图 173 表示在复合图上由体系(Π_1, Π_2)向体系(Π_2, Π_5)的转变过程。连系线 M_2M_5 垂直于新轴 s_{25}。

4. **更换两次投影面** 更换两次投影面的作图步骤，原则上与更换一次投影面时所作的步骤没有什么区别。这时应当遵守的一般规则是：点的新投影离开新投影轴的距离等于被更换的投影离开前一条轴的距离。

图 171 表示点 $A(A_1, A_2)$ 在旧体系(Π_1, Π_2) 中的投影向它在新体系(Π_1, Π_4) 中的投影——$A(A_1, A_4)$的转变。

使平面的更换过程继续下去，并使体系(Π_1, Π_4)(这个体系现在已是"旧"的了)变为新体系(Π_4, Π_5)，为此，可用垂直于 Π_4 的新平面 Π_5 代替平面 Π_1。在复合图(图 174)上，引新轴 s_{45} 和新的连系线$A_4A_{45} \perp s_{45}$。在这条连系线上截取线段 $A_{45}A_5 = A_1A_{14} = v^A$。这样得到的点$A_5$ 就是点 A 在平面Π_5 上的投影。点 A 的投影便从(A_1, A_4)变为(A_4, A_5)。

因此，用原形的新投影代替被更换的投影的作法，与原形的两个旧投影(不更换的投影和被更换的投影)有关。过不更换的点的投影作新的连系线垂直于新轴，并且根据被更换的投影量出原形点离开旧轴的高度或深度，然后在新的连系线上自新轴起截取这些高度或深度。

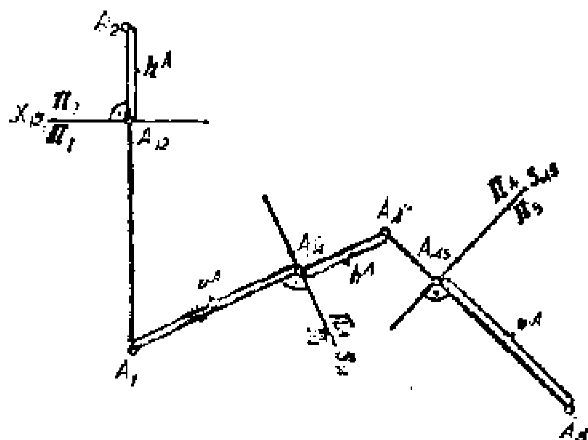


图 174

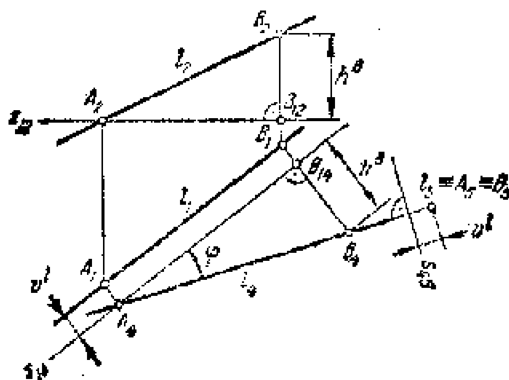


图 175

§2. 用更换投影面法解决的基本问题

1. 用更换投影面法解决各种问题(定位问题和度量问题)以下列四个基本问题的解为基础。

问题 1　将一般位置直线 $l(l_1, l_2)$ 变换为新投影面体系中的等距线。

图上的一般位置直线 l 用线段 $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ 给出(图 175)。因为在复合图上投影轴的位置("距离的计算基准")可以自由选择,这样就可从过最低的点 A_2 引出这条轴($x_{12} \perp A_1A_2$)。

从图中可见,直线 l 不是等距线,因为它没有一个投影平行于轴 x_{12}。所以,要使 l 变为等距线,例如变为对新投影面的正平线,我们作水平投射面 Π_4 平行于 l,从而将体系(Π_1, Π_2)变为体系(Π_1, Π_4)。平面 Π_4 的水平投影 s_{14},即新的投影轴,应选得平行于 l_1。为了作直线 l 的新的正面投影,先作出新的连系线,并在其上标出点 A 和 B 的新投影:在轴 s_{14} 上($h^A=0$)的点 A_4 和高度为 $h^B=B_{14}B_4=B_{12}B_2$ 的点 B_4。将作出的点连接起来,便得到直线的新投影 $l_4(A_4B_4)$。

这样,在新的投影面体系(Π_1, Π_4)中,直线 $l(l_1, l_4)$ 是正面等距线,因为 $l_1 /\!/ s_{14}$,因而 $l /\!/ \Pi_4$。所以线段 A_4B_4 等于线段 AB 的实长。

总之,将平面 Π_2 更换为平面 Π_4 后,我们得到如下的结果:

1) 直线 $l(l_1, l_4)$ 变为等距线;

2) 线段 A_4B_4 等于线段 AB 的实长;

3) 投影 A_4B_4 与轴 s_{14} 的夹角 φ 等于直线 l 对水平投影面 Π_1 的倾角的实形[1]。

问题 2　将一般位置直线 l 变换为新投影面体系中的投射线。

上面已经研究过用更换一次投影面的方法将一般位置直线变换为等距线(参看图 175)。

为了将直线 $l(AB)$ 变换为投射线,还需要再更换一次投影面,使体系 (Π_1, Π_4) 变为体系(Π_4, Π_5)。

选择新的投影面 Π_5 垂直于投影面 Π_4,并且还使它垂直于直线 $AB /\!/ \Pi_4$,这样一来,直线 AB 就成为投射线($\Pi_5 \perp AB$)。

在图上(参看图 175),应当引新的投影轴垂直于 A_4B_4($s_{45} \perp A_4B_4$)。因而在这种情况下,连系线 A_4A_5 和 B_4B_5 与直线 A_4B_4 重合。在连系线上从新轴 s_{45} 起截取线段 v^l,使等于直线 l 上的点对平面 Π_4 的深度,即得已知直线在平面 Π_5 上的投影,其形状为一点 $l_5 \equiv A_5 \equiv B_5$。

这样,在第二次更换投影面之后,便转到平面体系(Π_4, Π_5)。这时得到如下的结果:直线 AB 变为对平面 Π_5 的投射线,它所有的点(整条直线)在平面 Π_5 上投射为一个点 $A_5 \equiv B_5$。

问题 3　将一般位置平面 Θ 变换为新投影面体系中的投射面。

图上的一般位置平面 Θ 用三角形 $ABC(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ 给出。要使 Θ 变为投射面,例如变为正面投射面,应当用平面 Π_4 代替平面 Π_2,使 Π_4 垂直于 Θ (图 176)。

为此,在平面 Θ 上作水平线 $h(h_1, h_2)$,并选择新投影面 Π_4 垂直于该水平线,也就是垂直于还未更换的投影面 Π_1。这时,水平线 h 和已知平面 Θ 对平面 Π_4 成为投射位置。

---

① 对照图 169, a, 图上的水平线 h 直接在图上得到同样的结果。

为了在复合图上实现这个更换，引新投影轴 s_{14} 垂直于水平线的水平投影 $h_1(s_{14}\perp h_1)$。然后过最低点 C_2 引旧轴 $x_{12}(x_{12}\perp C_1C_2)$，并在相应的新连系线上作出点的新投影 A_4、B_4 和 C_4，它们位在一条直线(平面Θ的新投影 Θ_4)上。

总之，将平面 Π_2 更换为平面 Π_4 后，得到如下的结果[①]：

1) 平面 $ABC(A_1B_1C_1, A_4B_4C_4)$ 变为投射面；

2) 投影 $(A_4B_4C_4)$ 与轴 s_{14} 的夹角 φ 等于平面Θ对水平投影面 Π_1 的倾角的实形。

问题 4 将一般位置平面Θ变换为新投影体系中的等距面。

上面已经研究过用更换一次投影面的方法将一般位置平面变换为投射面(参看图 176)。

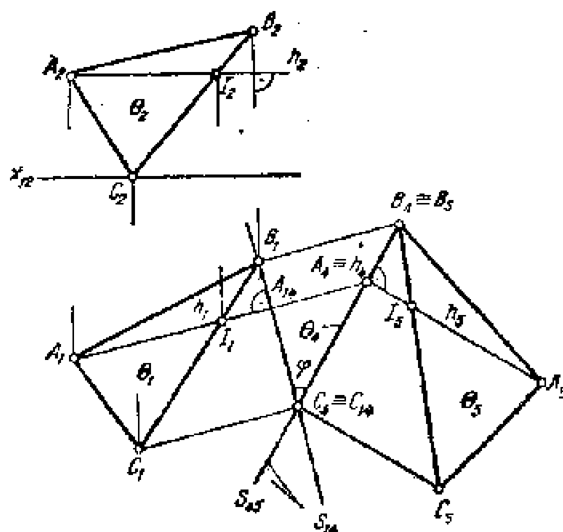


图 176

要把由三角形 ABC 给出的平面Θ变换为**等距面**，应把平面体系(Π_1, Π_4)变为新体系(Π_4, Π_5)，即再用新平面 $\Pi_5 /\!/ \Theta$ 代替平面 Π_1。为此，在图上引入新轴 $s_{45}\equiv\Theta_4$，并在连系线 $A_4A_5 /\!/ C_4C_5$ $(C_5C_6\perp s_{45})$ 上截取线段 $A_4A_5=A_{14}A_1$ 和 $C_4C_5=C_{14}C_1$。点 B_5 与 B_4 重合。于是得到平面 ABC 的**新投影** $A_5B_5C_5$。

总之，依次更换**两次**投影面后，我们得到如下结果：

1) 平面 $ABC(A_4B_4C_4, A_5B_5C_5)$ 变为平面 Π_5 的等距面；

2) 投影 $(A_5B_5C_5)$ 等于三角形 ABC 的实形[②]。

§3. 用更换投影面法解题的例子

例 1 求作交叉两直线的公垂线。

已知交叉两直线 AB 和 CD(图 177, a)。在垂直于已知交叉两直线的无数直线中，只有**一条公垂线**与这两条已知直线**相交**。在这公垂线上两交点间的线段，还确定交叉两直线间的**最短距离**。

此题的解法归结为使投影面 Π_5 **垂直于**两已知直线之一，例如垂直于直线 AB(参看图 177, a)。直线 AB 于是变为对平面 Π_5 的**投射线**，此时点 A 和 B 的投影重合为一点 $(A_5\equiv B_5)$。

交叉两直线 AB 和 CD 的**公垂线** KL 垂直于投射线 AB，因而与平面 Π_5 平行，即它是对 Π_5 的等距线。因此，直角 KLD 投射到平面 Π_5 上成为直角 $K_5L_5D_5$(参看第四章 §1 的定理 1)。

线段 K_5L_5 等于给出两直线 AB 和 CD 间最短距离 KL 的**实长**。

同时，直线 KL 是与交叉两直线相交的**唯一**的公垂线。

在复合图上的作图步骤如下图(图 177, $б$)。

已知交叉两直线 $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ 和 $CD(C_1D_1, C_2D_2)$，第一次更换投影面 Π_2 为平面 Π_4，使直线 AB 变为等

① 对照图 170, a，图上的**水平投射面** Λ **直接**在图上得到同样的结果。

② 对照图 170, $б$，图中位在水平面上的三角形的实形**直接**从图上确定。

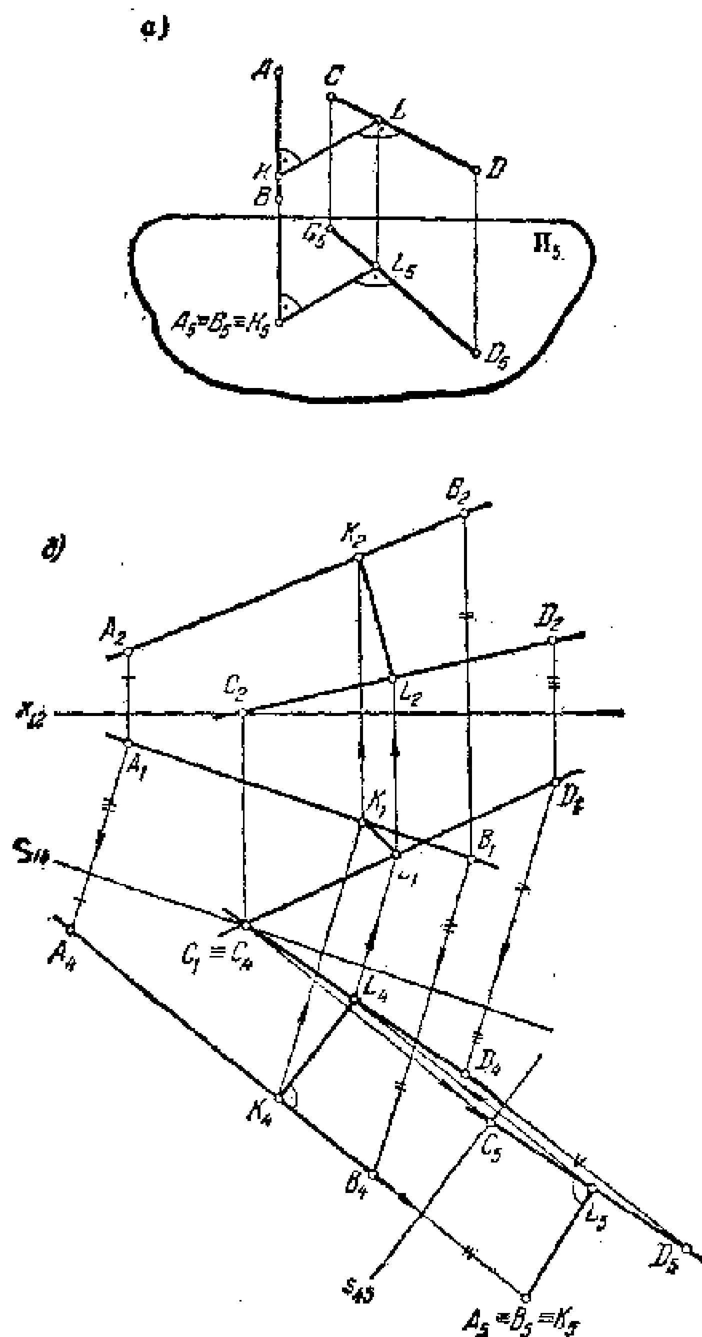


图 177

距线. 第二次更换平面 Π_1 为平面 Π_5, 使直线 AB 变为投射线。由点 $A_5 \equiv B_5$ 向直线 C_5D_5 作垂线，便得到交叉直线 AB 和 CD 间的**公垂线** KL 的投影 K_5L_5。

线段 K_5L_5 给出直线 AB 和 CD 间的**最短距离**。

要在 Π_1 和 Π_2 上作出所求的公垂线的投影，可沿连系线作出点 L_4，并引 $L_4K_4 \parallel s_{45}$，因为 $KL \parallel \Pi_5$（参看图 177, *a* 和 *б*），然后作出线段 KL 的原投影 K_1L_1 和 K_2L_2。

例 2 试确定构成料斗出口部分的平面间的夹角. 料斗的尺寸已注在图上(图 178)。

所求的角 φ 确定用于连接料斗出口部分两邻壁的角钢的剖面。

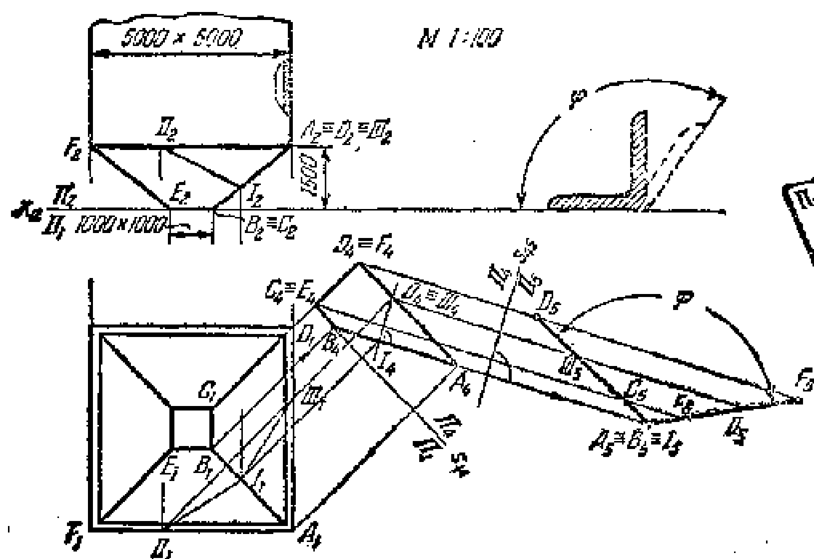


图 178

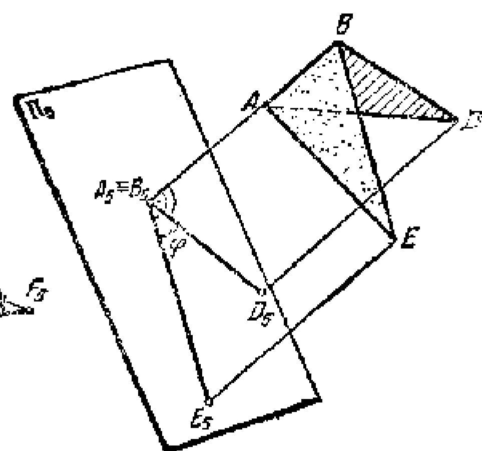


图 179

确定两面角的问题，归结为作出已知两面角在投影面 Π_5 上的投影，而 Π_5 要垂直于两面角的棱边 AB。实际上，这时直线 AB 投射为一点 $A_5 \equiv B_5$，而棱面 ABD 和 ABE 投射为直线 A_5D_5 和 A_5E_5（图 179）。角 $\varphi = \angle D_5A_5E_5$ 就是所求的两面角的直线角。

要将直线变为投射线，如上所述，应当更换两次投影面。

为了确定料斗出口部分两平面间的夹角 φ（参看图 178），我们选用棱边 AB，相邻两棱面用 $ABCD$ 和 $ABEF$ 表示①。取轴 x_{12} 与 B_2E_2 重合。

将平面 Π_2 更换为平面 Π_4，使棱边 AB 变为等距线。为此引入新轴 x_{14}（$x_{14} \parallel A_1B_1$），并作出两棱面的新投影，这两个新投影重合为一：$A_4B_4C_4D_4 \equiv A_4B_4E_4F_4$。

第二次用平面 Π_5 代替平面 Π_1，使棱边 AB 变为投射线。新轴 x_{45} 垂直于 A_4B_4。

在平面 Π_5 上棱边 AB 投射为点 $A_5 \equiv B_5$，而棱面投射为直线 A_5D_5 和 A_5F_5。角 $\varphi = \angle D_5A_5F_5$ 就是所求的两面角的直线角。

将平面 Π_5 看作一个垂直于两面角的棱边引出的截平面，并标出其交点 I_4 和 $II_4 \equiv III_4$，就可求出直线角在投影面 Π_1 和 Π_2 上的投影 $II_1I_1III_1$ 和 $II_2I_2III_2$。

§4. 平行运动法

1. 更换投影面法是使已知形体保持不动而变动投影面，使用与此不同的相反方法，即保持投影面不动，而把空间形体作为刚性体系移动到所需的位置，也可得到相同的结果。

上述空间形体的移动，可以用平行运动法实现。

若空间形体移动时，形体上所有的点在互相平行的平面上移动，则这种移动称为平行运动。

形体绕一轴线旋转是平行运动的一个简单例子。这时形体上的点各在垂直于旋转轴的平面

① 在图 178 上，两平面是选用料斗出口部分的外表面。

上描绘出一个圆周，因此这些圆周彼此平行。

以后，我们将研究对一个投影面的平行运动。譬如说，在对平面 Π_1 的平行运动中，运动的形体上的点是在一些水平等距面上移动的。

设点M对平面 Π_1 作平行运动。这时它的运动轨道 $M^1M^2M^3$……位在水平面 Σ 上(图 180，a)。同时点M的水平投影 M_1 描绘出一条与曲线 $M^1M^2M^3$……全等的曲线 $M_1^1M_1^2M_1^3$……，而在正面投影上，点 M_2 沿着水平线 $\Sigma_2 \equiv M_2^1M_2^2M_2^3$……移动(图 180，$a$和$б$)。

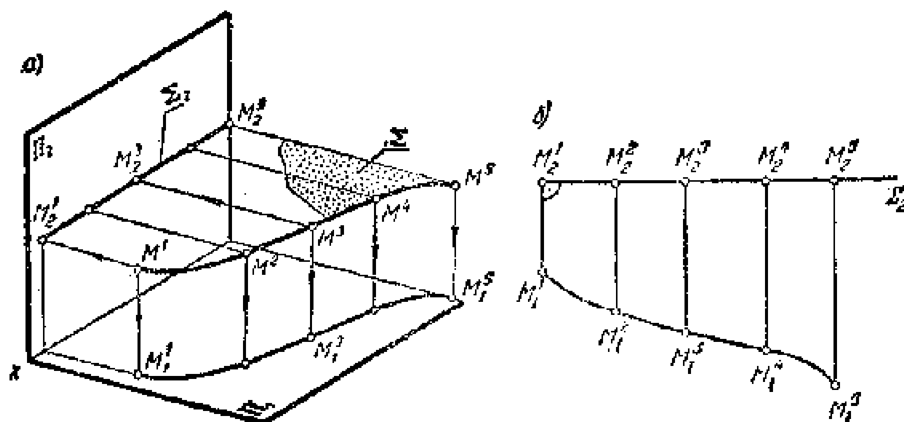


图 180

我们来研究根据运动的形体的已知位置的投影求出其最后的（所求的）位置的投影的规则。

2. **定理1** 如果形体对平面 Π_1 平行运动，则形体上各点的正面投影沿着垂直于连系线的直线移动；这时运动的形体的水平投影本身形状保持不变而在水平投影面上移动。

为了证明这个定理，我们来研究线段 $AB(A_1B_1, A_2B_2)$的运动(图 181，a)。

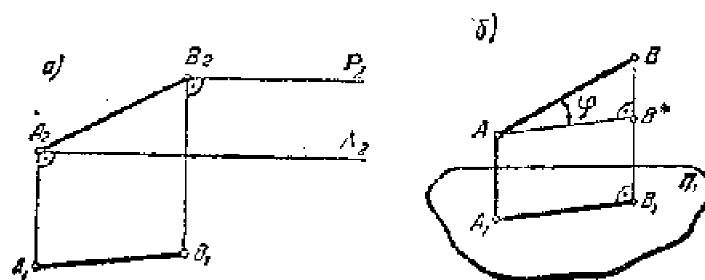


图 181

点A在平面 $\Lambda(\Lambda_2)(\Lambda \parallel \Pi_1)$上移动，而点$B$在平面 $P(P_2)(P \parallel \Pi_1)$ 上移动。因此，这两个点的正面投影 A_2和 B_2 分别沿直线 Λ_2 和 P_2 移动。但平面 Λ 和 P 是水平等距面，因此 $\Lambda_2 \parallel P_2$ $(P_2 \perp B_1B_2)$。这就证明了定理的第一部分。

线段 AB 在平面 Π_1 上投射为 A_1B_1(图 181，$б$)。过点A引直线 $AB^* \parallel A_1B_1$。

因为这是正投射，所以$\angle A_1B_1B = \angle AB^*B = 90°$。试观察直角三角形 AB^*B。在这三角形中，直角边 B^*B 等于点A和B的高度差，也可以说等于平面 Λ 和 P 的高度差。当线段 AB 运动时，

B^*B 的大小显然不变。而线段 AB 在运动时也是不变的，因此当 AB 平行运动时，三角形 AB^*B **不变而保持原状。**

特别是，由此可见，线段 AB 与平面 Π_1 的夹角在运动过程中也是不变的，连任意的平面图形对平面 Π_1 的倾角也不变。

这样，运动中的形体的任意线段 AB 的**投影** $A_1B_1 = AB^*$ 在整个运动过程中保持不变，因此整个形体的投影也不变。这就证明了定理的第二部分。

3. 采用对平面 Π_1 的平行运动法进行复合图的变换时，可以根据刚才证明的定理进行如下：

1）在图纸的适当位置照样画出所给形体的水平投影；

2）根据新的水平投影沿连系线确定正面投影。

当形体对平面 Π_2 平行运动时，形体上的点的水平投影沿着垂直于连系线的直线移动，而形体的正面投影则始终保持不变而在投影面上移动。

4. 我们来研究用平行运动法解题的一个例子。

例 试用平行运动法确定三角形 ABC 的实形（图 182）。

使三角 ABC 对平面 Π_1 作平行运动，并使它处于**正面投射面的位置** $\overline{ABC}$。为此，在平面 ABC 上作水平线 $h(h_1, h_2)$ 并画出与三角形的投影 $A_1B_1C_1$ 全等的新水平投影 $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$，使水平线 $\overline{h}_1$ 平行于连系线（$\overline{h}_1 \parallel A_1A_2$）。三角形顶点的正面投影 A_2、B_2、C_2 将沿着水平线移动，它们的新位置 $\overline{A}_2$、$\overline{B}_2$、$\overline{C}_2$ 可沿着连系线求出。三角形的新的正面投影 $\overline{C}_2\overline{A}_2\overline{B}_2$ 变成一直线段。

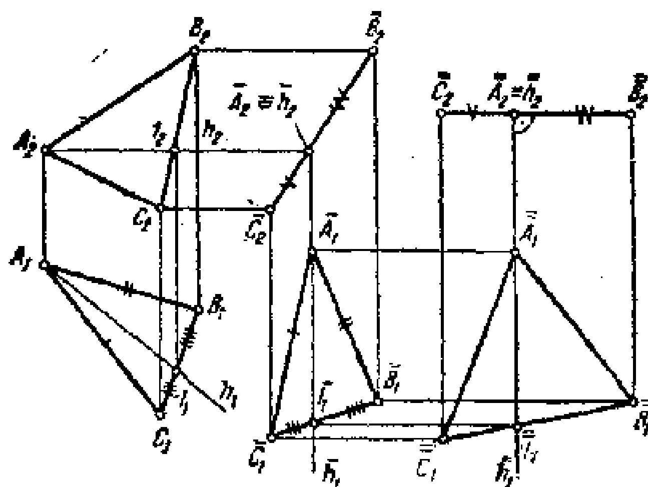


图 182

对平面 Π_2 作**第二次**平行运动，使三角形 $\overline{ABC}$ 处于水平位置 $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$。为此，把三角形的新的正面投影 $\overline{\overline{C}}_2\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{B}}_2$ 画成一水平线段，在该线段中 $\overline{\overline{C}}_2\overline{\overline{A}}_2 = \overline{C}_2\overline{A}_2$ 和 $\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{B}}_2 = \overline{A}_2\overline{B}_2$。三角形的顶点的新的水平投影 $\overline{\overline{A}}_1$、$\overline{\overline{B}}_1$、$\overline{\overline{C}}_1$，在连系线与点 $\overline{A}_1$、$\overline{B}_1$ 和 $\overline{C}_1$ 的运动轨道（垂直于连系线的直线 $\overline{A}_1\overline{\overline{A}}_1$、$\overline{B}_1\overline{\overline{B}}_1$ 和 $\overline{C}_1\overline{\overline{C}}_1$）的交点处求得。

所得三角形 ABC 的新的水平投影 $\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{C}}_1$ 确定了它的**实形**（$\triangle\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{C}}_1 = \triangle ABC$）。

刚才研究的例子表明，要将一般位置平面变换为**投射面**只要作一次平行运动；要将同一平面变换为**等距面**需要对平面 Π_1 和 Π_2 连续作两次平行运动。

为比较起见，我们指出，用**更换投影面法**解同样问题时，也需要更换一次或两次投影面(参看本章§2和§3)。

用**平行运动法**解题时，可以在图纸的整个幅面上随意布置物体的投影，从而避免各投影的重叠。这是本方法的主要优点，特别是在解复杂问题时更为显著。

§5. 绕垂直于投影面的轴旋转的方法

1. 形体绕垂直于投影面的轴旋转是平行运动的特殊情况。

这时形体上所有的点都沿着位在垂直于旋转轴的平面上的一些圆周移动，这些圆周的中心在旋转轴与上述各平面的交点上。

绕轴旋转的方法具有平行运动的全部特点，而在很多情况下，解题更为方便。

例如，如果点M绕垂直于平面Π_2的轴i旋转(图183, a)，则这时它在垂直于轴i同时平行于平面Π_2的平面$\Theta(\Theta\perp i; \Theta /\!/ \Pi_2)$上描绘出一个圆周，其中心为$O$。所以点的轨道在平面$\Pi_2$上将投射为同样半径$R$的圆周，而在平面$\Pi_1$上则投射为长度等于$2R$的线段。如果将点$M$按反时针方向转过一角度$\varphi$到新位置$\bar{M}$，则点的正面投影$M_2$也转过同一角度并占有位置$\bar{M}_2$，而水平投影$M_1$则沿着直线$\Theta_1$移动到点$\bar{M}_1$。

在图183, $б$上表示在复合图上点M的旋转。

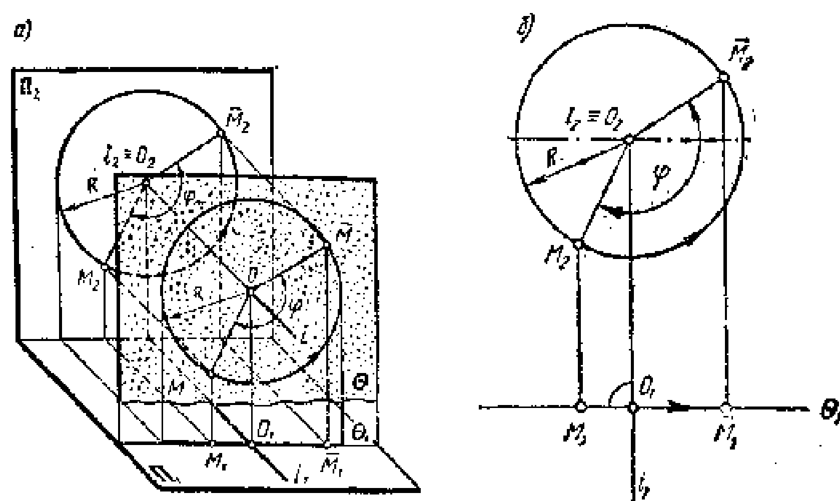


图 183

为了将直线或平面转一已知角，只要分别将直线上的两个点或平面上不在一直线上的三个点转同一角度。

在图184上表示直线$l(AB)$绕铅垂轴转过一角度φ。应该注意，点A和B的水平投影沿着圆弧移动时，它们的正面投影沿着垂直于连系线的直线移动。

2. 用旋转法解各种问题时，我们会遇到**四个基本问题**，与前面用**更换投影面法**解题所遇到的相同(参看本章§2)。

上述**四个基本问题**可归纳为**两个综合问题**。

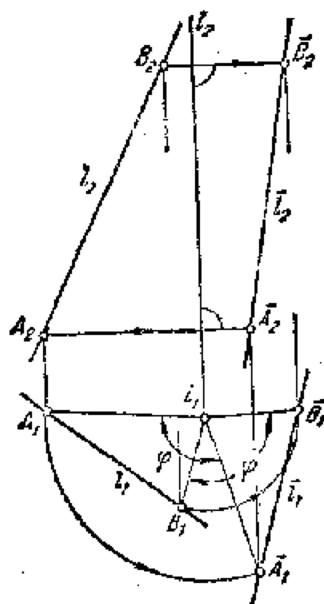


图 184

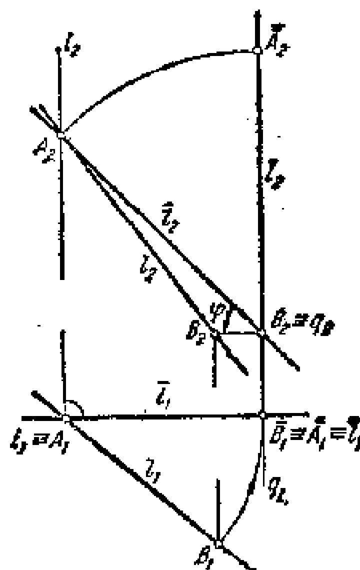


图 185

问题1 将已知的一般位置直线 l 连续绕垂直于投影面的轴旋转成水平投射线（图 185）。

我们这样来选取旋转轴，使它们都与直线 l 相交。这就使作图稍为简化，因为直线在轴上的点是不动的，这样，要确定直线旋转后的位置，只要旋转它的一个点，而不必象图 184 那样旋转两个点。

先将直线 $l(AB)$ 绕铅直轴 i 转到正平线位置。为此只要将点 B_1 绕中心 i_1 转到位置 $\bar{B}_1$，使旋转后的投影 $\bar{l}_1$ 垂直于连系线（$\bar{l}_1 \perp A_1A_2$），然后求出点 $\bar{B}$ 的正面投影 $\bar{B}_2$。

直线 $\bar{l}(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$ 平行于平面 Π_2，因而线段 $\bar{A}_2\bar{B}_2$ 给出线段 AB 的实长，角 φ 则等于直线 $\bar{l}$（和 l）对平面 Π_1 的倾角。

第二次的绕轴 $q \perp \Pi_2$ 的旋转，是要使直线 $\bar{l}(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$ 变到垂直于平面 Π_1 的位置 $\bar{\bar{l}}(\bar{\bar{l}}_1, \bar{\bar{l}}_2)$。直线 $\bar{\bar{l}}$ 的水平投影是点 $\bar{\bar{l}}_1$。

问题 2 将已知的一般位置平面 $\Gamma(ABC)$ 连续绕垂直于投影面的轴旋转成水平等距面（图 186）。

先将平面 Γ 绕铅直轴 i 转到正面投射面的位置①。为此在平面 Γ 上作一条水平线 $h(h_1, h_2)$，并将三角形 $A_1B_1C_1$ 绕中心 i_1 转到位置 $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$，使水平线 $\bar{h}_1$ 平行于连系线（$\bar{h}_1 \parallel A_1A_2$），（$\triangle\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1 = \triangle A_1B_1C_1$）。

于是三角形的正面投影将是直线 $\bar{\Gamma}_2$（平面 $\bar{\Gamma}$ 的投影）上的线段 $\bar{A}_2\bar{B}_2$（图 186）。而角 φ 是平面 $\bar{\Gamma}$（和 Γ）对平面 Π_1 的倾角的实形。

使已知平面绕垂直于平面 Π_2 的轴 $q(q_1, q_2)$ 作第二次旋转。这时点的正面投影画出圆心为

① 在作一般位置平面截旋转曲面的截线时，常碰到类似的问题（参看第九章 § 1）。

q_2 的圆弧，而水平投影沿着垂直于连系线的直线移动。

将直线$\overline{\Gamma}_2$转成水平位置$\overline{\overline{\Gamma}}_2$并作出三角形在平面$\Pi_1$ 上的新投影$\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{C}}_1$，我们就使已知平面 $\Gamma(ABC)$变成**水平等距面** $\overline{\overline{\Gamma}}(\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}})$。

三角形$\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{C}}_1$确定已知三角形 ABC 的实形。

3. 我们来研究一个例子。

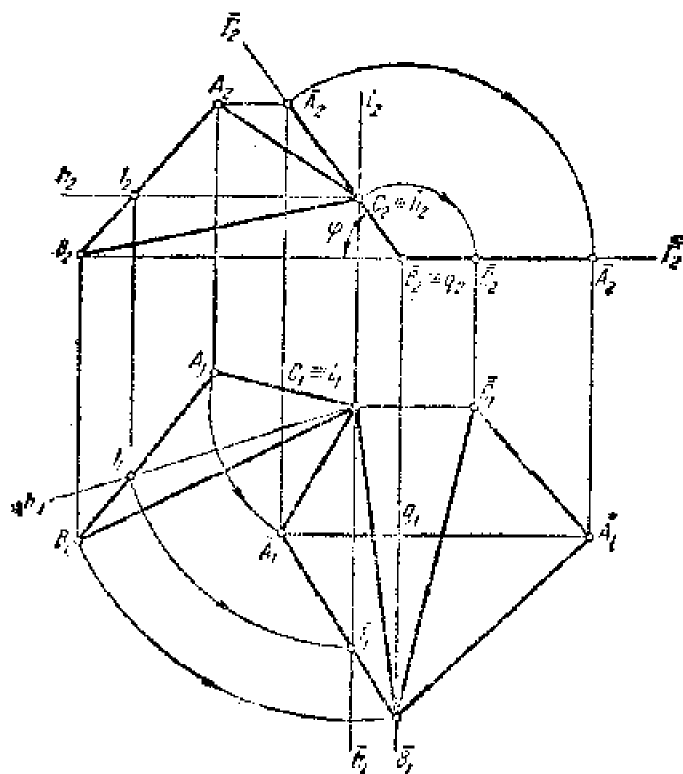


图 186

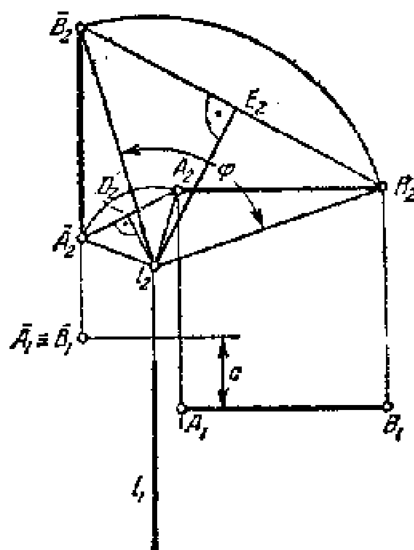


图 187

给出了线段 AB 的开始位置 $AB(A_1B_1, A_2B_2)$，$AB\perp\Pi_3$，以及旋转后的位置 $\overline{A}\overline{B}(\overline{A}_1\overline{B}_1, \overline{A}_2\overline{B}_2)$，$\overline{A}\overline{B}\perp\Pi_1$。要求找出线段的旋转-滑动轴、前进移动量和线段对该轴的旋转角(图 187)[①]。

线段移动时，它的正面投影的长度不变($\overline{A}_2\overline{B}_2 = A_2B_2$)，所以所求的旋转-滑动轴应当垂直于平面$\Pi_2$。轴 i 的正面投影(i_2)位在两直线 $D_2i_2\perp A_2\overline{A}_2$ 和 $E_2i_2\perp B_2\overline{B}_2$ 的交点处，这两条直线是线段 $A_2\overline{A}_2$ 和 $B_2\overline{B}_2$ 的中垂线。直线 D_2i_2 和 E_2i_2 是分别通过点 A_2 和 $\overline{A}_2$(直线 D_2i_2)以及点 B_2 和 $\overline{B}_2$(直线 E_2i_2)的圆周的圆心轨迹[②]。

轴的水平投影是 $i_1 /\!/ A_1A_2$。用 $\varphi(\angle\varphi = \angle A_2i_2\overline{A}_2 = \angle B_2i_2\overline{B}_2)$ 表示线段 AB 的旋转角，而用 c 表示它的前进移动量[③](图 187)。

---

① 在设计飞机的可收拢的起落架时就要解这个问题。

② 所引用的作法根据欧拉-沙尔定理。

③ 线段 AB 的移动可以看作是螺旋运动，其参数 p 等于单位时间内完成的前进移动量与旋转角之比，它们的值以相应的单位度量：

$$p = \frac{c}{\varphi} = \frac{h}{2\pi},$$

式中 h 为导程。

§6. 绕等距线的旋转(重合)

1. 绕等距线的旋转主要用来将已知平面图形转到**与等距面重合**；在这种位置时，平面图形投射到相应的投影面上**不会失真**。

先研究任意一点 B **绕水平线的旋转**。点 B 绕水平线 h 旋转时，在垂直于旋转轴 h 的水平投射面 Θ 上描绘一个圆周(图 188, a)。过 h 作一水平面 Λ，取它作为投影面 Π_1。于是平面 Θ 在投影面 Π_1 上投射为直线 Θ_1，而点 B 所画的圆周投射为直线段。

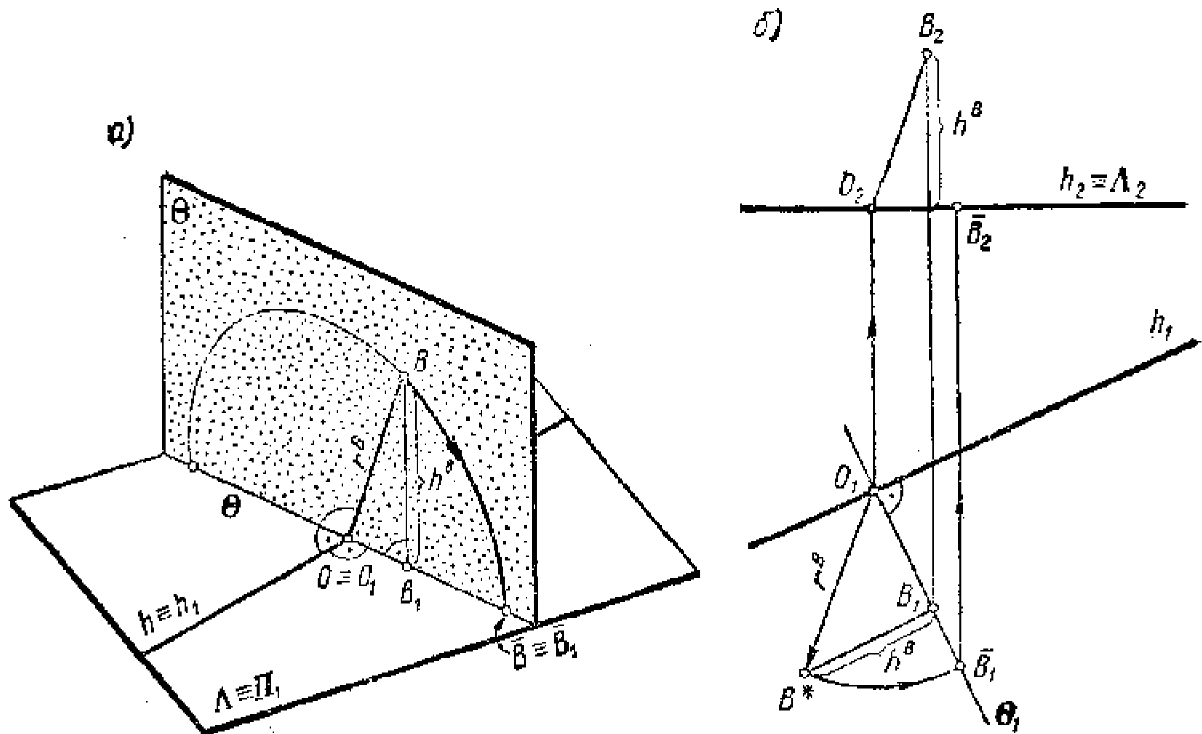


图 188

将点 B 按箭头所示方向旋转到与平面 Λ 重合。旋转中心在轴 h 与平面 Θ 的交点 O 上，而半径 $r^B = BO$ 由从点 B 到水平线 h 所画的垂线线段来确定。点 B 的重合位置 $\bar{B} \equiv \bar{B}_1$ 落在直线 Θ_1 上，与旋转中心的距离为 $O\bar{B} = O_1\bar{B}_1 = r^B$。

因此，为了作出点 $\bar{B}$，只要确定出旋转半径 r^B 的实长。这可根据直角三角形法作出(参看第二章 §1)。试研究直角三角形 OBB_1，在该三角形中旋转半径 r^B 是斜边。旋转半径 r^B 的水平投影 O_1B_1 和点 B 对水平面 Λ 的高度("超越度") $h^B = BB_1$ 是这个三角形的直角边。

在复合图上的作法已表示在图 188, $б$ 上。过点 B_1 作直线 $\Theta_1 \perp h_1$，并标出点 O_1——旋转中心 O 的水平投影。

为了确定旋转半径 r^B 的长度，作出了直角三角形 $O_1B_1B^*$，该三角形的直角边是线段 O_1B_1 和 $B_1B^* = h^B$，即点 B 对平面 Λ 的高度。在直线 Θ_1 上从点 O_1 起截取 r^B 的长度，就求得重合于点 $\bar{B}$ 位置的水平投影 $\bar{B}_1$。点 $\bar{B}$ 的正面投影 $\bar{B}_2$ 落在直线 $h_2 = \Lambda_2$ 上，在图上通常是不表示出

来的。

2. **平面的旋转** 我们来研究把平面 $\Sigma(ABC)$ 绕其水平线 $h\equiv 1C$ 旋转到水平等距面 $\overline{\Sigma}$ 的位置(图 189, a)。平面Σ上的直线 h 在旋转时保持不变. 所以要确定旋转后的平面, 只要再求出它的一个点, 例如求出三角形 ABC 的顶点 B 在转动后的位置。

点 B 绕水平线 h 旋转时描绘出一个圆心在点 O 的圆周 $B\overline{B}$。大家知道, 垂直于水平线 h 的直线 BO 是平面Σ对水平投影面的坡线。

假定, 线段 BO 旋转后占有位置$\overline{B}O \parallel \Pi_1$(参看图 189, a); 这时平面Σ占有水平等距面的位置 $\overline{\Sigma}\parallel\Pi_1$, 因而三角形 ABC 投射到平面 Π_1上不失真($\triangle\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1=\triangle ABC$)。

在直观图(图 189, a)上说明这些问题之后,就可以转到在复合图上来作图。

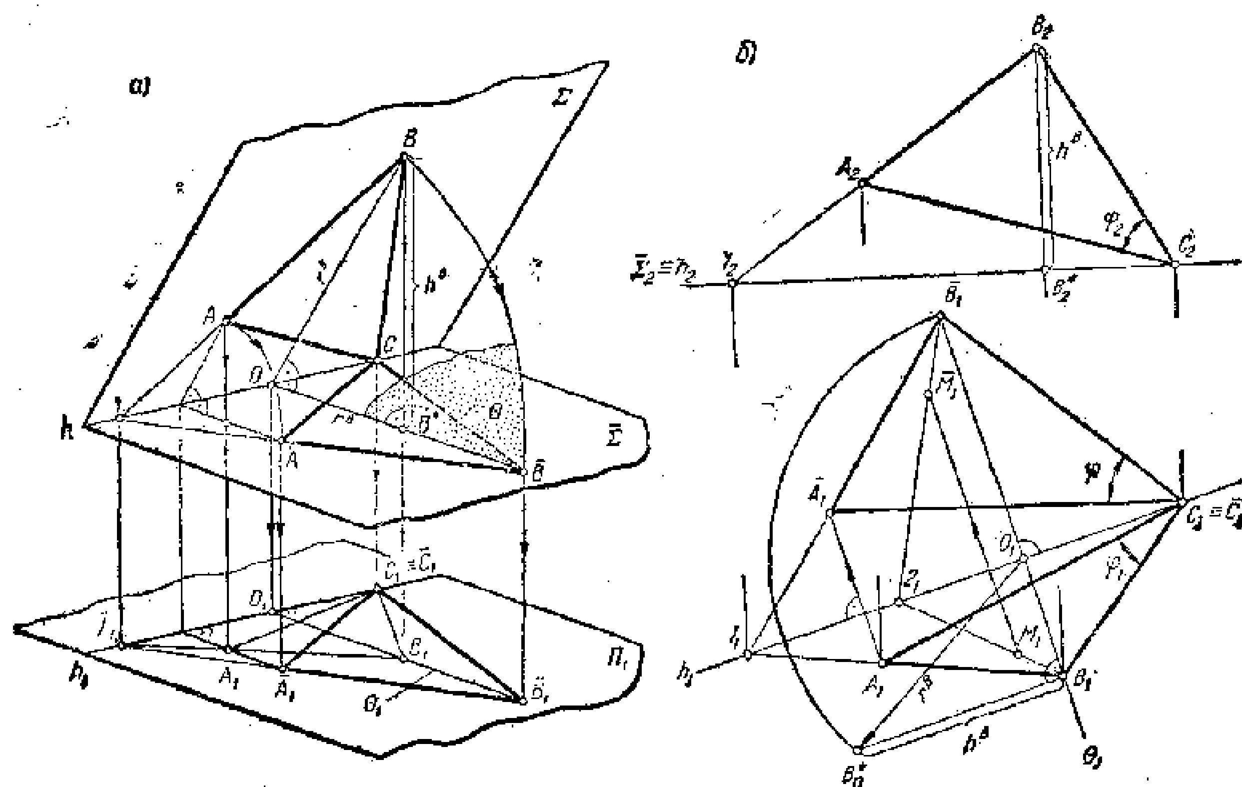


图 189

设平面$\Sigma(ABC)$在图上用它的三个点的投影: $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 给出(参看图 189, $б$)。在平面上过点 $C(C_1, C_2)$ 引一条水平线 $h(h_1, h_2)$, 并使点 $B(B_1, B_2)$ 绕所引的水平线旋转。

为此, 过点 B_1 作直线 $\Theta_1\perp h_1$ 并标出点 O_1 (旋转中心的投影)。为了确定点 B 的旋转半径的实长, 我们作出一个直角三角形 $O_1B_1B_0^*$, 该三角形有一直角边为所求线段 $OB=r^B$ 的水平投影 O_1B_1, 而第二条直角边 $B_1B_0^*$ 等于点 B 对相应等距面 $\overline{\Sigma}(\overline{\Sigma}_2)$ 的"超越度"$h^B=B_2B_2^*$(图 189, $б$)。

作出带有上述直角边的直角三角形 $O_1B_1B_0^*$后, 就确定出点 B 的旋转半径的实长 $O_1B_0^*$, 然后在直线 B_1O_1 上从点O_1起截取它的长度[①]: $O_1\overline{B}_1=O_1B_0^*=r^B$。

① 为了避免旋转前和旋转后三角形水平投影相重叠, 在复合图上平面 Σ 的旋转方向选取与图 189, a 上所表示的相反。

点 $\bar{B}$ 的正面投影 $\bar{B}_2$ 应当落在直线 $\bar{\Sigma}_2 \equiv h_2$ 上。在图上(参看图 189, б)它没有表示出来。

为了作出点 A_1 旋转后的位置 $\bar{A}_1$，不必重复对点 B_1 所进行的作图过程。为此，只要注意到，位在边 AB 与水平线 h 交点上的点 $1(1_1, 1_2)$(参看图 189, а和б)在旋转时不改变其位置，因而边 $\bar{A}_1\bar{B}_1$ 通过这个点。

因此，点 $\bar{A}_1$ 将位在直线 $1_1\bar{B}_1$ 与点 A_1 的运动轨道（直线 $A_1\bar{A}_1 \perp h_1$）的交点处（参看图 189, б）。将点 $\bar{A}_1$ 和 $\bar{B}_1$ 与不动点 $\bar{C}_1 \equiv C_1$ 连接起来，就得到三角形 $ABC = \triangle \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ 的实形。

与此同时还可以求得**任意平面角的实形**. 例如位在平面 Σ 上的 $\angle BCA = \angle \varphi$ 的实形。

3. 不难看出，图形绕等距线旋转，也象绕投射线旋转一样，可以看作是平行运动的特殊情况。例如，我们所讨论的绕水平线的旋转就是对平面 $\Theta \perp h$ 的平行运动的一种变异。

4. 当平面图形绕等距线旋转时，例如绕水平线 h (h_1, h_2) 旋转时(图 189, д)，我们作出了点 A 和 B 旋转后的投影 $\bar{A}_1$ 和 $\bar{B}_1$。

对于图形上其余的点，例如 M_1 和 $\bar{M}_1$，可用类似的方法求得。这时在图上得到两个点场：旋转前点的水平投影场 $\Pi_1(A_1, B_1, C_1)$ 和旋转后点的水平投影场 $\bar{\Pi}_1(\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$。这两个场处于亲似对应中. 这个亲似对应由亲似轴 h_1 和一对亲似点 B_1 和 $\bar{B}_1$ 给定。在已知情况下，亲似方向垂直于亲似轴($B_1\bar{B}_1 \perp h_1$)。

总之，利用平面图形绕等距线旋转的方法，可以使这个图形与相应的等距面重合。在特殊情况下，可以取投影面 Π_1 作为等距面。这时，平面图形就与投影面重合。

5. 试研究用绕等距线旋转的方法解题的一些例子。

例 1 试求直线 l 与平面 Σ 的夹角的大小(图 190)。

直线与平面间的角度由直线及其在平面上的投影之间的夹角来确定。因此，解题时可从作出所述的投影开始，也就是说作点 $L = l \times \Sigma$，从任意点 $M (M \subset l)$ 作垂线 $MM' \perp \Sigma$，并作出点 $M' = MM' \times \Sigma$。

这时角 $\varphi = \angle M'LM$ 就是所求的直线 l 及其在平面 Σ 上的投影间的夹角。

为了避免上述相当麻烦的作图手续，在复合图上，可以确定角 ψ 的实形，角 ψ 是所求的角 φ 的余角。

事实上，为了作角 ψ，只要从已知直线 l 上的任意点 M 引平面 Σ 的垂线即可。然后用图 189, б 所示的方法就可找到角 ψ。

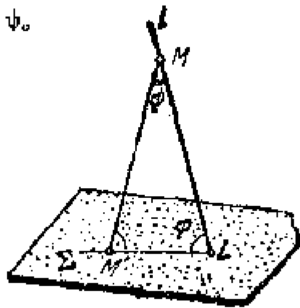


图 190

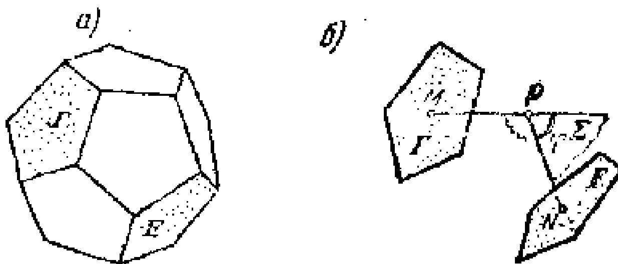


图 191

例 2 试求正十二面体两棱面 Γ 和 E 间的两面角的大小(图 191)。

为了确定两面角的大小，可以用更换投影面的方法。这时两面角的棱边要变换为投射线（参看本章 § 3）。

然而，在已知情况下，如同许多其它情况一样，两面角的棱边没有在图上表示出来(参看图 191)，而且也不必去找它，也就是说，不必作出平面 Γ 和 E 的交线。从空间任一点 P 对两面角的棱面 Γ 和 E 作法线 ($PM \perp \Gamma$、$PN \perp E$)，在这两直线的平面 Σ ($\Sigma \perp \begin{cases}\Gamma \\ E\end{cases}$) 上的点 P 处便得到**两个平面角**. 这两个平面角就是由平面 Γ 和 E 构成

的两个两面角的直线角(参看图 191, a 和 б)。

设 φ 为所求的角，则可以应用绕水平线旋转的方法确定其实形(参看图 189, б)。

例3 试作出用一般位置平面截角钢时所得截面的投影和实形(图 192)。

截平面 P 由下列相交于点 O 的等距线给出：水平线 h (h_2, h_3) 和正平线 f(f_2, f_3)。在水平线 h 上除了点 O (O_2, O_3) 外，还定出了点 Q(Q_2, Q_3)。截面的侧面投影与角钢的侧面投影相重合，因为角钢所有的棱面都是侧面投射面。所以在截面的侧面投影上标注 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ 后，我们就转而作它的正面投影。为此，利用一条通过点 O_0 和 Q_0 的"折射线"，其中 O_0 是两条任意射线 O_2O_0 和 O_3O_0 的交点，而 Q_0 是分别平行于前述两条射线的射线 Q_2Q_0 和 Q_3Q_0 的交点。

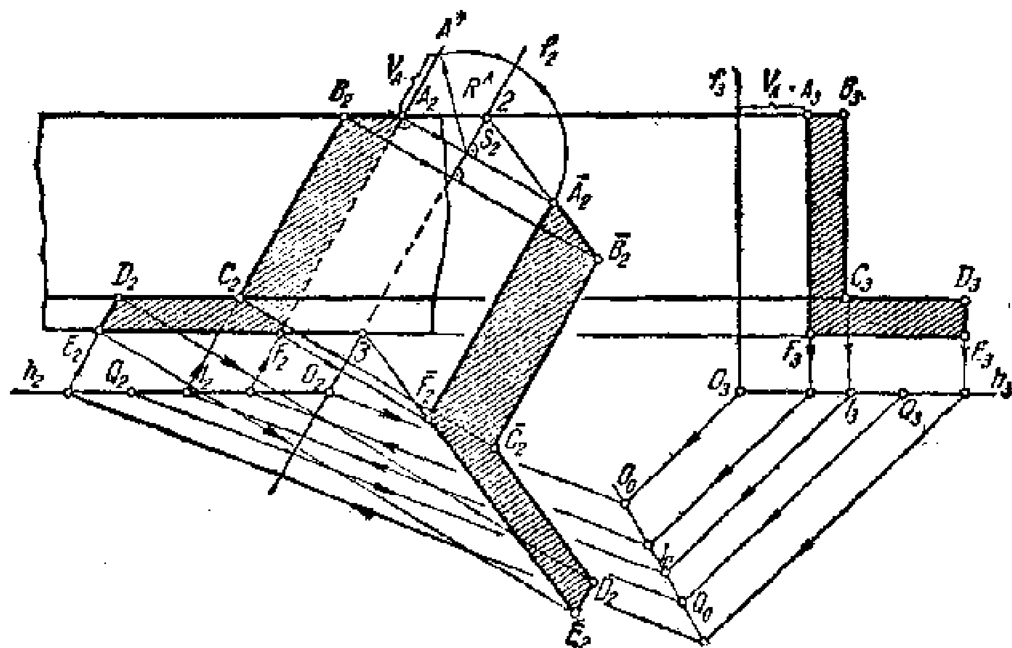


图 192

折射线使我们可以用位在一条直线上的各线段的正面投影的比等于其侧面投影的比(参看"绪论" § 1)来作水平线上各点的投影。

例如，为了作截面的边 BC 的正面投影 B_2C_2，只要标出点 $1_3 = B_3C_3 \times h_3$，引 $1_31_0 \parallel O_3O_0$ 和 $1_01_2 \parallel O_0O_2$ 并求出点 1_2。

其次，应该注意，所求截面的边 BC 位在已知角钢的正平面棱面上，该棱面与平面 P 交于正平线。因此，通过求得的点 1_2 作直线平行于正平线的投影 f_2，并标出截面边上的点 B_2 和 C_2。

截面的其余各点的正面投影可同样作出。

为了求截面的实形，使平面 P 绕正平线 f 旋转到正面等距面的位置。

试从点 A(A_2) 的旋转开始。为此，作直线 $A_2S_2 \perp f_2$。标出旋转中心 S_2，作直角三角形 $A_2S_2A^*$ 并求出旋转半径 R^A，利用 R^A 定出点 A_2 旋转后的位置 $\bar{A}_2$。

这样，平面 P 旋转后的位置由直线 f_2 和点 $\bar{A}_2$ 来确定，这就不难求出在重合位置上截面的其余各个顶点。

例如，为了作点 $\bar{B}_2$，先求出边 B_2A_2 上的不动点 2。这个点位在边 B_2A_2 与旋转轴 f_2 的交点处。然后引直线 $2\bar{A}_2$，它是直线 $2A_2$ 在重合后的位置。再在直线 $2\bar{A}_2$ 与 $B_2\bar{B}_2 \perp f_2$ 相交处求出点 $\bar{B}_2$。

为了作点 $\bar{F}_2$，我们利用了直线 AF(A_2F_2) 重合前后都平行于直线 f(f_2) 这一情况。

截面多角形其余各顶点在重合后的位置可同样地作出(参看图 192)。

多角形 $\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2\bar{D}_2\bar{E}_2\bar{F}_2\bar{A}_2 = ABCDEFA$ 就是所求的截面图形的实形。

§ 7. 利用辅助投射方法的图形变换

1. 使用上述更换投影面法、平行运动法和旋转法的目的，在于改变物体与投影面的相互位置，从而使物体由一般位置转到特殊位置。

物体在某平面上的投影的特殊形状，也可以用**辅助投射法**(平行投射或中心投射)将物体投射到该平面上而作出。

投射方向(正投射，但更常用的是斜投射)和投影面的选择决定于需要将图形改变成什么样子。在解决大多数的**定位**问题时，最好采用斜投射方法，将物体投射到已知投影面 Π_1 或 Π_2 上，或者投射到偶数等分面上。至于**度量**问题，则由于用辅助投射法解题比用其它变换方法更为复杂，因此我们不予讨论①。

2. 大家知道，点 M 在已知投影面上的斜投影 M' 是过已知点 M 且平行于已知投射方向 s 所作的直线的迹点。在中心投射时，投射线通过点 M 和投射中心 S。

例如，试沿方向 $s(s_1, s_2)$ 将点 $M(M_1, M_2)$ 投射到平面 Π_2 上(图 193)。为此，只要求出通过点 $M(M_1, M_2)$ 且平行于 $s(s_1, s_2)$ 所作的直线在 Π_2 上的迹点 $M'(M_1', M_2')$ 就可以了。

3. **直线**或线段的**辅助投影**可根据同样的原则作出。

假设要求沿方向 $s(s_1, s_2)$ $(s \parallel a)$ 将**直线** $a(a_1, a_2)$ 投射到平面 Π_2 上。在这种情况下，直线 a 的投影显然就是它在平面 Π_2 上的迹点 $a'(a_1', a_2')$ (图 194)。

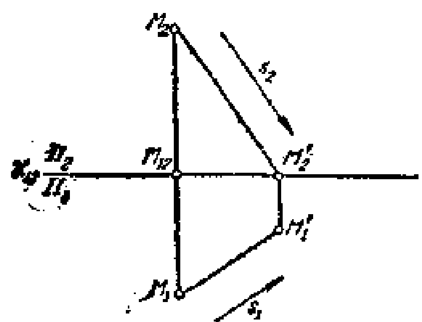


图 193



图 194

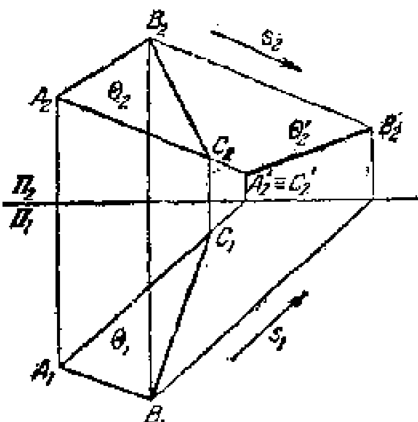


图 195

作**平面的辅助投影**时，只要投射它的三个点就够了。如果投射方向平行于被投射的平面，则平面的投影将是一条直线。

例如，图 195 作出了平面 $\Theta(ABC)$ 沿方向 $s \parallel \Theta (s \parallel AC)$ 在平面 Π_2 上的投影 $\Theta_2' \equiv A_2'B_2'C_2'$。

4. 试研究用辅助投射法解题的例子。

求作底面位在平面 Π_1 上的两个斜三棱柱的交线(图 196)。取棱柱 KLM 的棱边作为投射方向，作出两已知多面体在平面 Π_1 上的辅助投影。于是棱柱 KLM 在 Π_1 上的投影为其下底三角形 $K'L'M'$ $(K_1'L_1'M_1', K_2'L_2'M_2')$。

第二个棱柱的上底 ABC 投射为 $\triangle A'B'C'$ $(A_1'B_1'C_1', A_2'B_2'C_2')$，而下底 DEF 则与它的辅助投影重合。

用直线 $A_1'D_1$、$B_1'E_1$、$C_1'F_1$ 连接第二个棱柱上底和下底各顶点的投影，即得棱柱在 Π_1 上的**辅助投影**的图形。

所求两多面体的**交点的辅助投影**在棱柱 AF' 的棱边和棱柱 KM' 的底的辅助投影的相交处求得。

标出下列各点 $I_1' - B_1'E_1 \times K_1'M_1'$, $II_1' = C_1'F_1 \times K_1'M_1'$, $IV_1' - C_1'F_1 \times L_1'M_1'$, $V_1' = B_1'E_1 \times L_1'M_1'$，这些点是第二个棱柱的棱边与第一个棱柱的棱面的交点的**辅助投影**，而点 $III_1' \equiv VI_1' \equiv M_1'$ 是第一个棱柱的棱边与第二个棱柱的棱面的交点的**辅助投影**。

① 关于辅助投射，参看 C.M. 考洛托夫《画法几何学》，莫斯科—列宁格勒，国家机器制造、金属加工和黑色冶金出版社，1933 年版和 A.T. 恰而著的《画法几何学》，基辅—莫斯科，国家机器制造科技书籍出版社乌克兰分社，1949 年版。

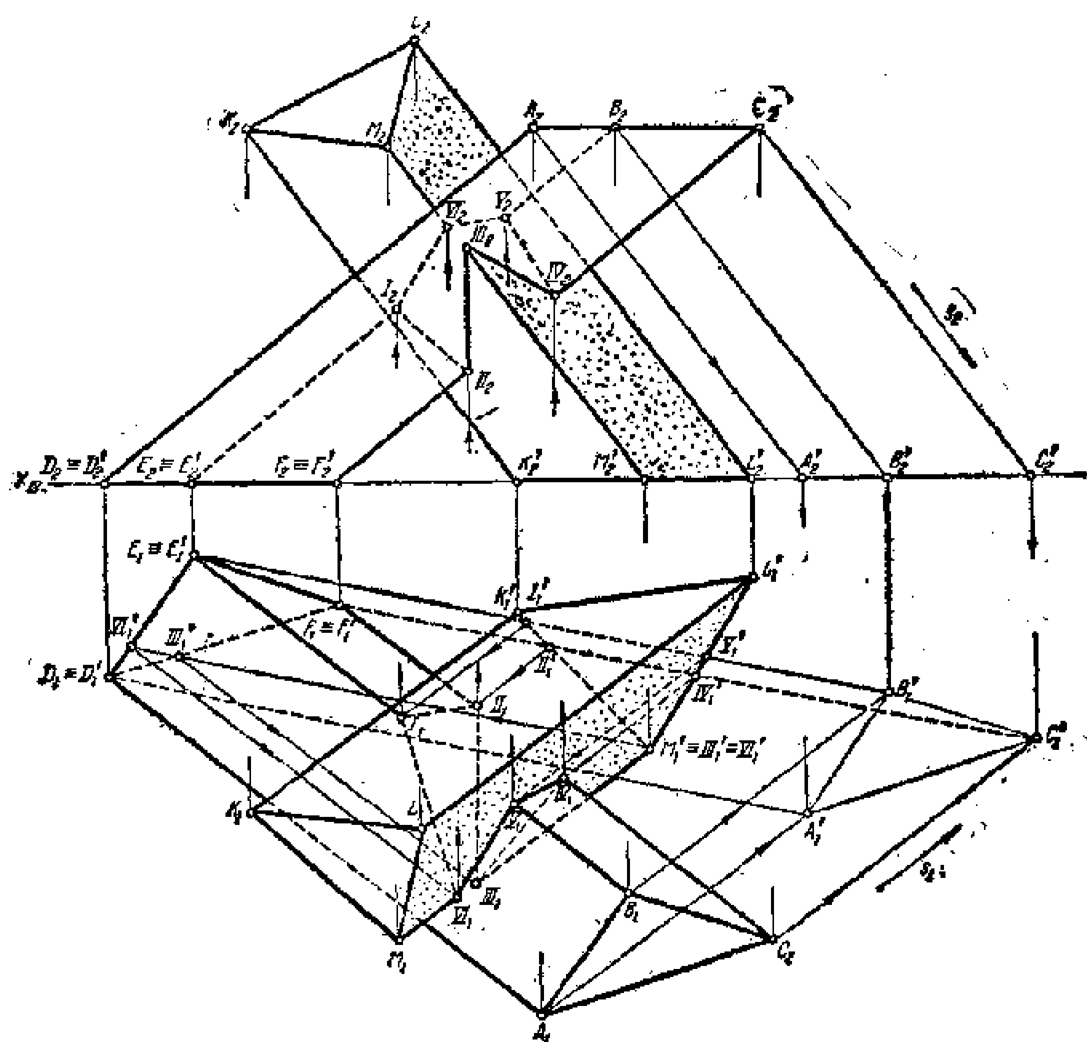


图 195

用相反的射线将点 I_1'、II_1'、IV_1' 和 V_1' 投射到相应的棱边 BE 和 CF 的投影上，就找到点 I、II、IV 和 V 在 Π_1 和 Π_2 上的投影。

为了作出点的投影 III_1' 和 VI_1'，先在第二个棱柱的相应棱面上找出这些点所在的直线。

引直线 $III_1'III_1^*\equiv VI_1'VI_1^*$ 平行于 $A_1'D_1'$，并在平面 Π_1 的投影上作出与它对应的直线 $III_1^*III_1 \parallel VI_1^*VI_1 \parallel A_1D_1$。在所作的直线 $III_1^*III_1$ 和 $VI_1^*VI_1$ 与棱边 M_1M_1' 的相交处，得到所求的点 III_1 和 VI_1，然后作出它们在 Π_2 上的投影。

现在剩下的只是将作出的点按必需的顺序连接起来。连接时要注意，用直线线段连接起来的每两个点，应当既位在第一个棱柱的同一棱面上，同时又位在第二个棱柱的同一棱面上(参看第三章 § 5)。

这样就作出了两个棱柱相交的折线 $I\ \ II\ \ III\ \ IV\ \ V\ \ VI$。

应该注意，两棱柱的下底都放在平面 Π_1 上(选择这个位置是为了使图形简单)，这种放法一点也不影响所述作图方法的普遍意义，无论两个多面体在空间处于怎样的位置，作图方法都一样。

5. 我们已经熟悉了许多的复合图变换方法。不过在某些情况下，解题时最合适的不是单纯使用一种研究过的复合图变换方法而是综合运用这些方法，特别是综合运用更换投影面法和旋

转法。

这两种方法的综合运用不仅能使解题简单，而且在某些情况下可以解决一些用其它方法一般难以解决的问题。

假设要求作出形体绕一般位置直线转一给定角度后的投影。这时可借助于更换两次投影面法将该一般位置直线变换为投射线，在新的投影面体系中完成作图之后再回到旧体系中去。

复 习 题

1. 有哪几种基本的复合图变换方法？
2. 更换投影面法和平行运动法有何原则区别？这两种方法又与辅助投射法有何原则区别？
3. 用更换一次投影面法或更换两次投影面法可解决哪些基本问题？
4. 试述平行运动的定义。形体平行运动时，其水平投影和正面投影怎样移动？
5. 形体绕垂直于投影面的轴旋转的特点是什么？绕等距线旋转的特点又是什么？
6. 怎样利用辅助投射法变换图形？用这种方法可解哪些问题？

练 习 题

1. 已知三角形 ABC。求作外接圆和内切圆的投影，并求三角形的垂心。

2. 试作一平面 Σ 平行于已知平面 $\Lambda(ABC)$，并距离 Λ 为 30 毫米。

3. 已知正四面体 $ABCD$（图 197）。试用更换投影面法确定：1）棱面 ABC 和平面 Π_2 间的两面角 α；2）棱边 AC 处的两面角；3）从顶点 A 到棱边 CD 的距离。

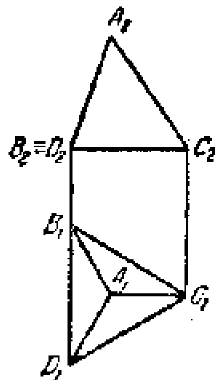


图 197

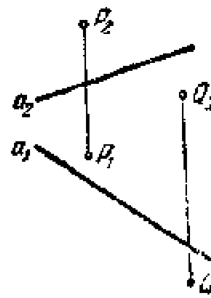


图 198

4. 在一般位置直线 $a(a_1, a_2)$ 上找出一点与两已知点 $P(P_1, P_2)$ 和 $Q(Q_1, Q_2)$ 等距（图 198）。

5. 试将直线 AB 绕铅直轴 i 旋转，使它与已知直线 m 相交（指明可能的解法）（图 199）。

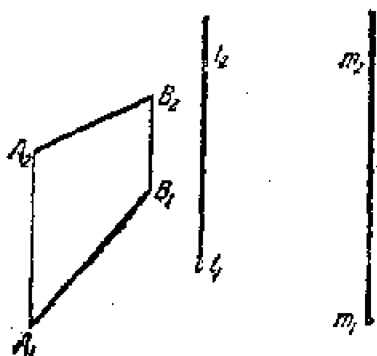


图 199

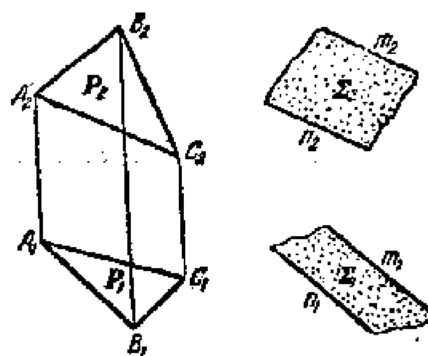


图 200

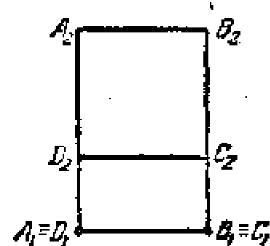


图 201

6. 试求平面 P(ABC)和平面 $\Sigma(m \parallel n)$间的夹角。

提示 从任意选择的一个空间点对平面 P 和 Σ 作垂线(图 200)。

7. 已知正方形 $ABCD$(图 201)。试绕其对角线将它转一角度 $\alpha=45°$。

8. 试将已知圆 k (k_1, k_2)绕直径 $AB(A_1B_1, A_2B_2)$转一角度 $\alpha=30°$，并求椭圆(圆的投影)的轴(图 202)。

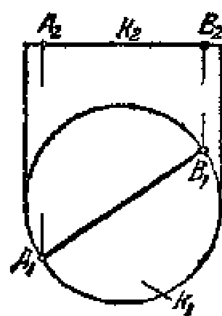


图 202

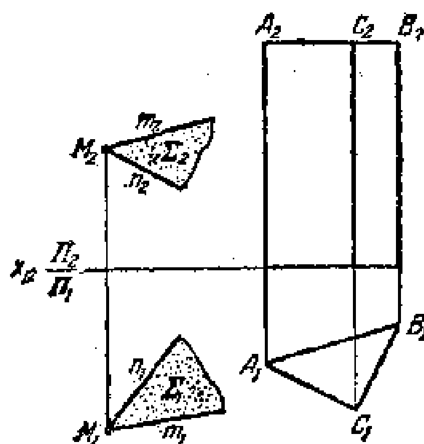


图 203

9. 试用辅助投射法作三棱柱与平面 $\Sigma(m \times n)$的截面(图 203)。

提示 辅助投影作在平面 Π_2 上。

第六章　曲线及其投影性质

§1. 基本概念和定义·平面曲线及其投影

1. 在画法几何学中，通常用运动的观点来研究曲线，即把曲线看作是点连续运动时描绘出来的轨迹。曲线本身也就是连续的。

如果曲线上所有的点都属于某一个平面，则此曲线称为平面曲线。所有的点不全在同一平面上的曲线，称为空间曲线。

点在曲线上每一个位置的运动方向，由曲线在该点M的切线 t 确定。

当M^1 在曲线 l 上趋近于M，割线MM^1 的极限位置称为平面曲线 l 在点M的切线 t(图204)。

位在曲线 l 所在的平面Ω上并垂直于曲线上过点M的切线 t 的直线，称为曲线在该点的法线 n。

如果曲线在其各点处都具有连续改变的切线，则它称为光滑的[①]。

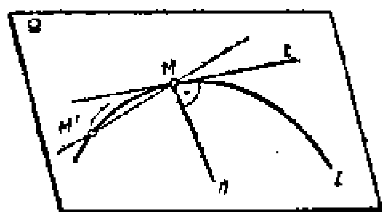


图　204



图　205

在曲线的某些点处，切线的连续性可能被破坏，因而曲线在这些点处没有确定的方向。例如，在曲线 ABC(图 205)上，在点B处切线的方向“突然”由 t_1 向 t_2 改变，因而曲线在该点具有两条不同的切线：一条 t_1 是从B指向A，另一条 t_2 是从B指向C。在这种情况下，B称为折点(角点)。

2. 我们将研究用方程(代数方程和超越方程)[②]确定的曲线，以及用图示给定的曲线。对于后一类曲线，也可以求出它们的方程，但这些方程只能近似地表达出这些曲线。

在画法几何中，曲线是根据它在复合图上的投影来研究的。

描绘曲线m的点M在运动中任一瞬间的位置，都是由它的两个投影确定的：$M(M_1, M_2)$。

---

① 在解析表达中，如果曲线可用参数方程：$x=f_1(t)$，$y=f_2(t)$，$z=f_3(t)$给定，则它称为光滑的，其中f_1、f_2、f_3是连续可微函数。

② 在笛卡儿坐标中，用代数方程确定的曲线有椭圆、抛物线、双曲线、笛卡儿叶形线、心脏线和星形线等等，而用非代数方程或超越方程确定的有正弦曲线、旋轮线和阿基米德螺线等。

所以在一般情况下，为了完全图示曲线 m（平面曲线或空间曲线必须给出它在复合图上的两个投影：$m(m_1, m_2)$（图 206）。

但是在一般情况下，曲线投影的形状不能立刻回答这样的问题：被投射的是怎样的曲线——平面曲线还是空间曲线。为回答这个问题，必须确定曲线上所有的点是否位在同一个平面上，这平面可以由曲线上三个任意选取的点给出。

例如，我们来研究画在图 206 上的曲线 $m(m_1, m_2)$。这条曲线是空间曲线，因为在曲线上取一任意点 $X(X_1, X_2)$，由作图可见，它不在由这条曲线上另外三个点确定的平面 $\Sigma(AMB)$ 上。

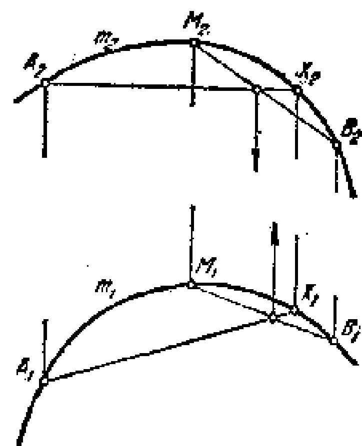


图 206

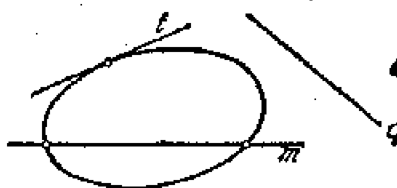


图 207

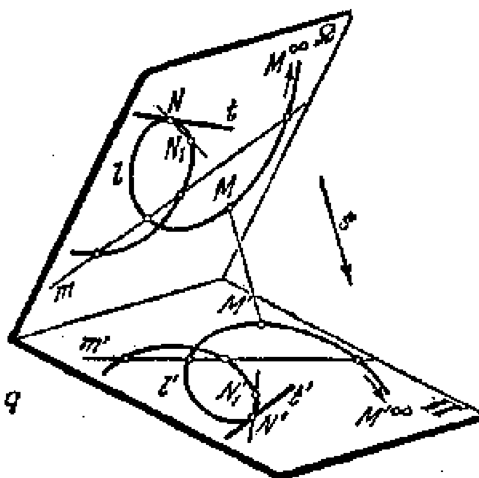


图 208

3. 当研究平面代数曲线时，曲线的次的定义具有重要意义。这个定义既可用代数方法表达：曲线方程的次称为曲线的次，也可用几何方法表达：曲线与一直线的交点数称为平面代数曲线的次。这时必须注意的是，交点数中包括实坐标点和虚坐标点。设有一条二次曲线——椭圆。椭圆的方程是二次的①，直线的方程是一次的。这个方程组确定了椭圆与直线的两个公共点的坐标，并且这些点可能是两个不同的实点（直线 m 是割线），或两个重合的实点（直线 t 是切线），或两个虚点（直线 q 位在椭圆外）（图 207）。

4. **平面曲线的投影的基本性质**。设已知曲线 l 位在某一平面 Ω 上。将曲线 l 依方向 s 投射到投影面 Π' 上（图 208）。这时，曲线 l 的每一个点 M 将投射为平面 Π' 上的点 M'。结果在平面 Π' 上得到曲线 l' ——已知曲线 l 的投影。

曲线 l' 将具有原曲线 l 在平行投射时保持不变的那些性质。这时应当考虑到这些平行投射的性质，例如平面 Ω 和 Π' 的点的一一对应及保持点与直线的相互从属性（关联性）。

现在来研究平面曲线的投影的基本性质。

1）平行投射时，平面代数曲线的次不变。

事实上，试对位在平面 Ω 上的曲线 l 引割线 m（参看图 208），在投影上就得到直线 m'，而线 m 与 l 的交点也投射为投影 m' 与 l' 的交点。

① 参看本章§3。

这样，线 m 与 l 的交点数等于它们的投影 m' 与 l' 的交点数，即投影 l' 的次等于曲线 l 的次。

2）曲线上的无穷远点投射为其投影上的无穷远点。

当某一点 M 沿着曲线 l 移动时，其投影 M' 将沿着曲线 l' 移动。当点 M 移动到无穷远（M^∞）时（参看图 208），它的投影也变为无穷远点 M'^∞。

3）曲线的切线投射为其投影的切线①。

在点 N 处作曲线 l 的切线 t，并把它看作是当 $N_1 \to N$ 时割线 NN_1 的极限位置（参看图 208）。

这时，割线 NN_1 在 Π' 上投射为割线 $N'N'_1$。当点 N_1 沿着曲线 l 趋近于点 N，从而割线 NN_1 趋向于其极限位置 t 时，点 N'_1 即沿着曲线 l' 趋近于点 N'，而割线 $N'N'_1$ 趋向于极限位置 t'。这就是说，t' 是 l' 在点 N' 处的切线。同时 t' 是在点 N 处曲线 l 的切线 t 的投影，因为 NN_1 和 $N'N'_1$ 间的投影关系在运动的任何时刻都保持不变。

4）两平面曲线间的交点个数在投射时保持不变。

事实上，曲线 l 和 r 的公共点变成了它们的投影 l' 和 r' 的公共点。

必须指出，平面曲线在特殊情况下（当投射方向平行于曲线所在的平面时）可投射为一直线，而当曲线所在的平面与投影面平行的时候，曲线的相应投影与曲线本身全等。

§ 2. 曲线上点的分类

1. 如果点 M（M^0、M^1、M^2、……）沿着曲线 l 运动（图 209），属于这个点的切线 t 就绕变动着的切点转动，并占有位置 t^0、t^1、t^2、……。同时切线还可以认为是沿着曲线 l 无滑动地滚动。这时，移动着的切点 N 沿着切线对切线上一个选定的不动点（$\bar{N}^0$）作前进运动（N^0、N^1、N^2、……）。

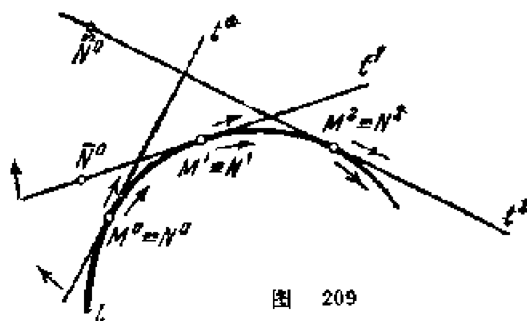


图 209

曲线在具有唯一的切线 t 的某一点 M 附近的形状与点沿切线的运动特性和切线本身的运动（转动）特性有很大关系。如果点沿切线的前进运动的方向在某一点处改变了，这个点称为回折点或奇异点，如果切线的旋转方向在某一位置上改变了，这个位置上的切线称为回折切线或奇异切线。与上述情况相反的点和切线都称为正则的或普通的。

用符号“＋”表示正则的，用符号“－”表示回折的，我们可得下面四种可能的组合：

可能的组合	1	2	3	4
点 N	＋	＋	－	－
切线 t	＋	－	＋	－

① 对于空间曲线的类似定理将在本章 § 4 中讨论。

这时，曲线上的对应点称为：1）普通点(图 210)；2）拐点(具有奇异切线)(图 211)；3）第一种回折点或尖点(奇异点)(图 212)；4）第二种回折点或"喙点"(具有奇异切线的奇异点)(图 213)。

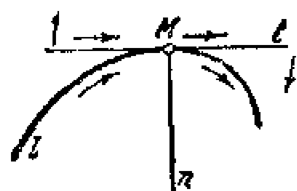


图 210

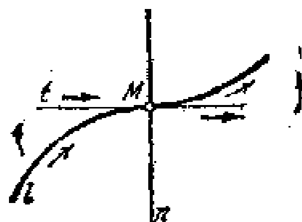


图 211

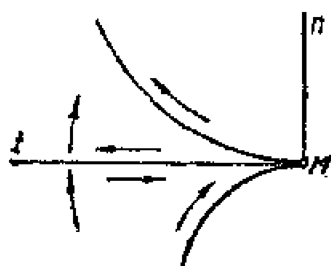
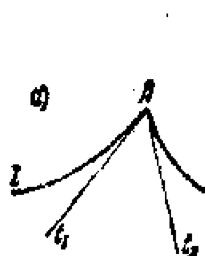
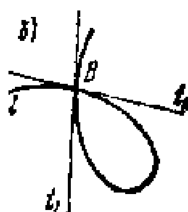


图 212



图 213





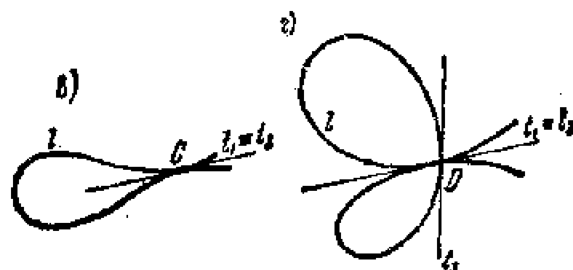


图 214

2. 除了讨论过的点以外，下面的一些点也属于曲线的奇异点(图 214)。

1）角点或折点(图 214，a 上的点 A)，在该点处，切线的方向"突然"改变，因而曲线有两条切线；

2）结点或多重点(二重点、三重点等等)，在这些点处，曲线本身相交。在图 214，$б$，$в$ 和 $г$ 上表示出具有两条不同的切线的二重点 B 和具有重合的切线的二重点 C 以及三重点 D。

将空间曲线投射到平面上，或者在求曲面的平截线以及求两曲面的交线时，都可能出现上述的平面曲线上各种类型的点①。

§3. 二 次 曲 线

1. 如果曲线在笛卡儿坐标里的方程是流动坐标的二次方程，则该曲线称为二次曲线。

二次曲线的普遍方程具有如下形式：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

式中数值 A、B、C、D、E 和 F 称为代数方程的系数。

如果用 A 除所有系数，则方程(1)具有下列形式：

$$x^2+\frac{B}{A}xy+\frac{C}{A}y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0. \tag{1'}$$

大家知道，为了确定一条二次曲线，必须给出它的五个点②。

事实上，把已知点的坐标 x_i 和 y_i 代入方程(1')后，便得到带有五个未知的系数比的一组五个方程，解这个方程组并求出所求的数值 $\frac{B}{A}$、$\frac{C}{A}$ 等等，就确定了二次曲线的方程(1')的形式。

二次曲线与直线相交于两个点（两个不同的点，或两个重合的点，或两个虚点——图 207)。

如果在讨论中除去虚曲线以及退化为一对直线的二次曲线，则可以证明③，每一个二次方程(1)经过坐标变换和简化之后，可以化成下面各种形式的圆锥曲线方程之一。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3}$$

$$y^2=2px。 \tag{4}$$

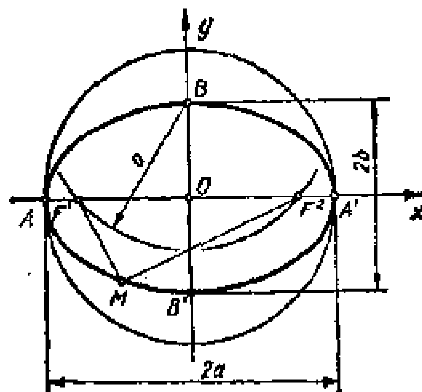


图 215

与这些方程对应的曲线④称为：椭圆(图 215)，双曲线(图 216)，抛物线(图 217)。

椭圆和双曲线是中心曲线，坐标轴与曲线的对称轴重合(参看图 215 和 216)，而抛物线是非中心曲线，坐标轴的配置如图 217 所示。

2. 椭圆是点(M)的轨迹，该点与两个已知点 F^1 和 F^2 的距离之和具有同一个数值 $2a$(参看图 215)。

点 F^1 和 F^2 称为椭圆的焦点，距离 F^1F^2 称为椭圆的焦距，点 A、A'、B 和 B' 称为椭圆的顶点，线段 $AA'=2a$ 称为椭圆的长轴，线段 $BB'=2b$ 称为椭圆的短轴。

如果椭圆的两半轴相等($a=b$)，则它的方程(2)确定一个圆周(参看图 215)。

椭圆是闭合的二次曲线，不具有非固有点。

在第四章 §5 中已经指出，圆周的平行投影是一条曲线，这条曲线我们也曾称为椭圆。由方程(2)确定的椭圆与作为圆周的平行投影的椭圆是相同的⑤。

---

① 参看本章 §4 和第九章、第十章。

② 也可以不给出点而给出一些切线，或者点和切线的组合，只要这些元素的总数等于 5 即可。

③ 在解析几何教程中有这个问题的证明，例如参看 Н. И. 勃列瓦洛夫《解析几何》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1955 年版。

④ 这些曲线有时称为"圆锥截线"，因为它们可在用平面截圆锥面所得的截线上得到(参看第九章 §3)。

⑤ 在 Н. Ф. 切特维鲁新等《画法几何教程》1956 年版有这个问题的证明，莫斯科，国家技术理论书籍出版社。

3. 双曲线是点(M)的轨迹，该点与两个已知点 F^1 和 F^2 的距离之差具有同一个绝对值 $2a$ (参看图 216)。

点 F^1 和 F^2 称为双曲线的焦点，距离 F^1F^2 称为双曲线的焦距，点 A 和 A' 称为双曲线的顶点。线段 $AA'=2a$ (常常也就是直线 AA') 称为双曲线的实轴，线段 $BB'=2b$ (常常也就是直线 BB') 称为双曲线的虚轴。

双曲线不是闭合曲线，它有两条无穷远分支，这两条分支无限地接近于两条直线——渐近线[①]。渐近线可以看作是在双曲线各分支的无穷远点(非固有点)处的切线。因为两条渐近线确定双曲线的两个渐近方向，所以双曲线有两个不同的非固有点。双曲线的渐近线由矩形的对角线来确定，这个矩形的中心在点 O，矩形的边 $2a$ 和 $2b$ 平行于轴 Ox 和 Oy (参看图 216)。

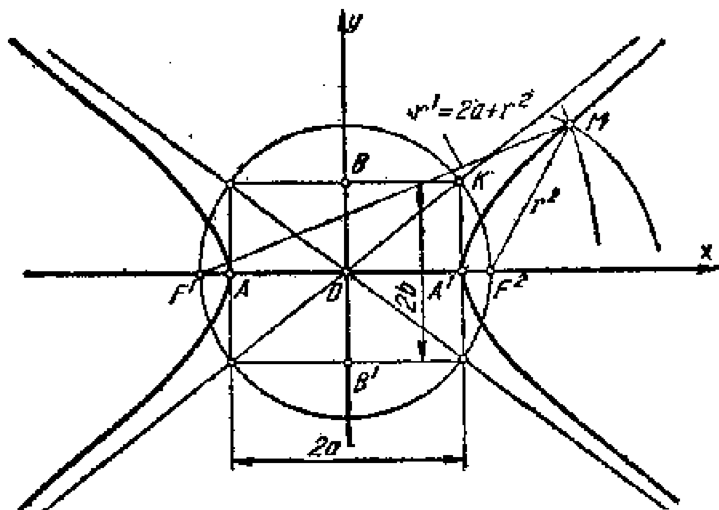


图 216

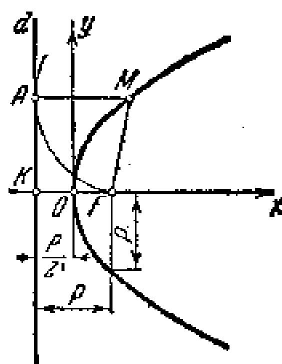


图 217

4. 抛物线是点(M)的轨迹，该点与已知点 F 和已知直线 d 等距离(参看图 217)。

点 F 称为抛物线的焦点，而直线 d 称为抛物线的准线。由焦点到准线的距离 $FK=p$ 称为抛物线的参数。直线 FK 称为抛物线的轴，线段 FK 的中点 O 称为抛物线的顶点。

5. 前面已经指出，平行投射时，平面代数曲线的次不变(参看本章 § 1 之 4)。

由此可见，二次曲线的平行投影还是二次曲线。

因为曲线上的无穷远点投射为其投影上的无穷远点 (本章 § 1)，所以曲线上无穷远点的数目在投影中保持不变。

没有无穷远点的椭圆，显然投射为也没有无穷远点的二次曲线，即投射为椭圆(或圆)。

同样，抛物线(有一个无穷远点[②])的平行投影是抛物线，而双曲线 (有两个无穷远点[③])的平行投影是双曲线。

§ 4. 空 间 曲 线

1. 空间曲线或"双曲率"曲线与平面曲线不同的是曲线上所有的点不全在同一平面上。

空间代数曲线[④]的次可用下面的几何方法确定：空间代数曲线与任意平面的交点数称为空间代数曲线的次。

---

① 证明参看第九章 § 3。

②、③ 参看第九章 § 3。

④ 由独立的两方程 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 所组成的联立方程给出的曲线，称为空间代数曲线，此处 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 为 x,y,z 的多项式。

与平面曲线的情况一样，在这些交点中既包括实交点，也包括虚交点。

空间曲线的**切线**定义与平面曲线的切线定义相同。

当空间曲线 l 上的点 M^1 沿着该曲线趋近于点M时，割线MM^1的极限位置称为空间曲线 l 在点M处的切线 t (图 218)。

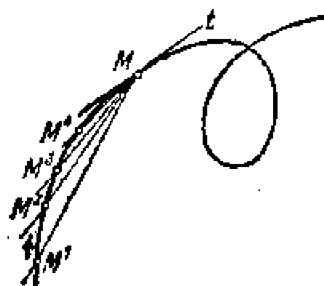


图 218

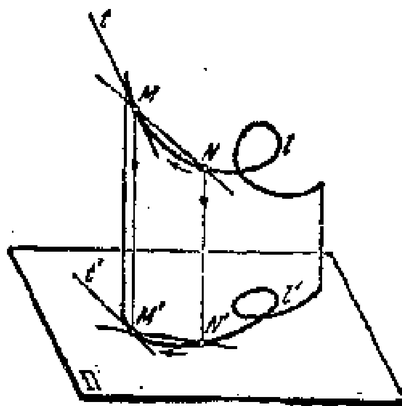


图 219

2. 作曲线的投影时，下面的定理有着极重要的意义。

定理 1 如果空间曲线 l 的切线 t 不投射为一点，则 t 投射为曲线的投影l' 的切线t'。

设想有一条空间曲线 l，它在平面 Π' 上的投影是曲线 l' (图 219)。为了作曲线 l 在点M处的切线 t，先引一割线 MN，它的投影是曲线 l' 的割线$M'N'$。

现在，如果沿着曲线 l 移动点N，当这个点无限接近于点M时，割线 MN 便绕着不动的点M转动而趋于其极限位置——切线 t。

与点N沿曲线 l 移动的同时，其投影 N' 沿曲线 l' 移动。

最后，当点N移动到与点M重合时，割线 MN 就占有其极限位置——切线 t。与此同时，点N' 沿曲线 l' 移动到与点M' 重合，而割线$M'N'$ 占有切线 t' 的位置。因为在运动的任一瞬间，直线 MN 和 $M'N'$ 的投影关系保持不变，即现在这个关系也不会被破坏，因而切线 t 投射为切线t'。

但是，逆定理是不正确的。只有当直线的**两个投影**都是曲线的两个相应投影的切线，而且那两个切点是曲线上同一已知点的投影时，这直线才是空间曲线在该已知点处的切线。

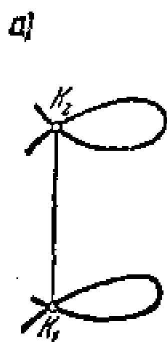
3. 如果说为了确定平面曲线的特性只需要它的一个投影就够了，那么对空间曲线来说，情况就不同了。

例如，图 220，a 和 $б$ 给出两条空间曲线的投影，其中一条有**真实的**二重点$K(K_1, K_2)$，而另一条则有**虚假的**二重点L和M。

要确定曲线的真实特性，只能用对照曲线的**两个**投影的办法，因为当投射方向选得合适时，空间曲线上的任何一点都可以表现为奇异点。

4. 通过空间曲线的切线的每一个平面都可称为曲线的切面。

切于曲面上一已知点的所有平面构成一个平面束。这个平面束中有一个平面称为密切面。在研究空间曲线时，密切面起着特别重要的作用。



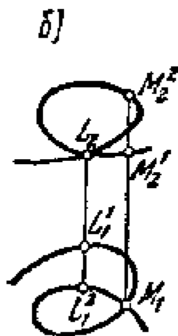


图 220

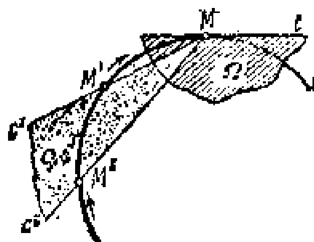


图 221

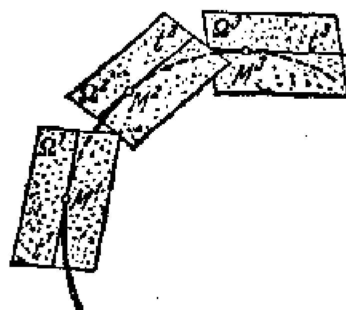


图 222

现在来说明密切面与平面束的其余的切面有何区别。为此，在曲线 l 上的普通点M附近取三个点M、M^1、M^2，然后研究曲线的这一部分(图 221)。

这三个点确定了通过点M的某个截平面 Ω_{12} 以及割线 c^1 和 c^2。当点 M^1 和 M^2 无限接近于点M时，割线 c^1 和 c^2 就趋于切线 t 的位置，而平面 $\Omega_{12}(M、M^1、M^2)$ 则趋于在曲线上点M处的密切面Ω的位置。

所以，密切面可以定义为通过曲线上三个无限接近的点的平面的极限位置①。

因为割线 c^1 和 c^2 的极限位置(当$M^1\to M$和$M^2\to M$)是切线t，所以密切面Ω通过曲线上点M处的切线$t(t\subset\Omega)$。

密切面可以用切线 t 和接触点附近的某一个点近似地给定。

可以证明，在接触点附近，曲线位在密切面的不同的两侧②。

与通过空间曲线上点M的其它平面比较，密切面于点M处最紧密地接近空间曲线，这使我们能够把点M附近的空间曲线看作是**密切面上的曲线**(参看图 221)。

5. 与前面所述平面曲线的情况相似，假定点M沿空间曲线 l 运动，而与点M对应的切线t沿曲线无滑动地滚动。于是移动着的切点沿着切线对切线上一选定的不动点作前进运动（图 222)。随着点M和切线 t 的运动，在点M处的密切面Ω也在移动而改变着它的空间位置（参看图 222)。

切线 $t(t^1、t^2、t^3\cdots\cdots)$ 的运动可以看作是切线在密切面 $(\Omega^1、\Omega^2、\Omega^3\cdots\cdots)$ 上绕瞬时旋转中心 $(M^1、M^2、M^3\cdots\cdots)$ 所作的微小转动的总和。

密切面Ω $(\Omega^1、\Omega^2、\Omega^3\cdots\cdots)$ 的运动通常看作是密切面绕瞬时轴 $(t^1、t^2、t^3\cdots\cdots)$ 所作的微小转动的总和。

如果在某点M处，点沿切线的前进运动、切线的转动和密切面的转动这三个要素的运动方向都不改变，则对应的元素：点、切线和平面称为正则的。否则就称为回折点、回折切线和回折平面。

如果用符号"＋"表示正则的，而用符号"－"表示回折的，可得下面八种可能的组合：

---

① 假定这样的极限位置存在，且与点 M^1 和 M^2 向点M移动的方法无关。

② 证明参看 С.П. 芬尼可夫《微分几何教程》第 67 页，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1952 年版。

可能的组合	1	2	3	4	5	6	7	8
点 M	·	+	−	+	−	−	·	·
切线 t	+	+	−	−	+	+	−	−
密切面 Ω	+	−	+		−		+	−

第一种情况的点称为普通点。其余情况的点称为奇异点，因为它们都有某些回折元素：回折点(情况 5、6、7、8)，回折切线(情况 3、4、7、8)，回折密切面(情况 2、4、6、8)。

6. 我们来研究带有各种类型的点的空间曲线的例子。

为了研究方便，取一条位在旋转柱面上的空间曲线，并认为它由两个分支组成。所研究的点分曲线为这两个分支①。

我们这样来放置曲线，使得在所研究的点处的切线垂直于某一个投影面，而使密切面平行于另一个投影面。这有助于根据图来判断点、切线和密切面是正则的还是回折的。

我们约定，如果沿着点的运动方向看，当点运动时，根据密切面是顺时针方向旋转还是反时针方向旋转而称空间曲线为右旋线或左旋线。

图 223 表示点的八种可能情况中的两种，它们在表中用号码 1 和 2 表示。

在第一种情况中(图 223, a)，对于普通点 $M(M_1, M_2)$，无论是点沿切线的运动方向，还是切线和密切面的旋转方向，都保持不变。当点沿着曲线从点 M^1 向 M 再从 M 向 M^2 运动时，如图所见，平面 Ω 是顺时针方向旋转的。

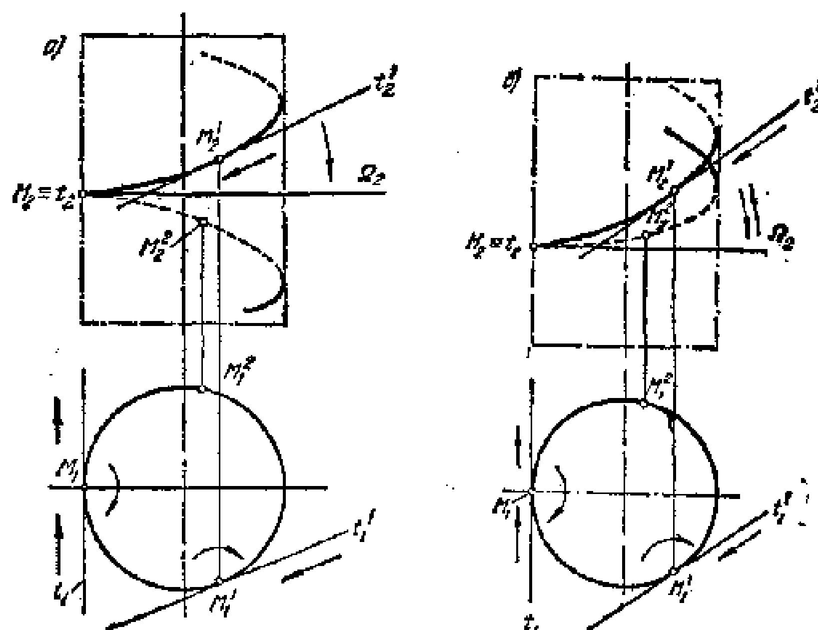


图 223

在第二种情况中(图 223, $б$)，密切面的旋转方向在点 M 处改变了，所以这个密切面称为回折密切面。当点从 M^1 向 M 运动时，平面 Ω 顺时针方向旋转(**右旋线**)，而当点从 M 向 M^2 运动时，平面 Ω 反时针方向旋转(**左旋线**)。

7. 通过空间曲线 l 上一已知点并垂直于该点处的切线 t 的每一条直线都称为空间曲线 l 的法线。在点 M

① 研究空间曲线上奇异点的这种方法是副教授 Н. Н. 雷若夫提出的。

处曲线的法线的轨迹是一个平面，称为法面 P(P⊥t)。

在这些法线中挑出两条：1)位在密切面上的一条法线称为主法线 n，2) 垂直于密切面的一条法线称为副法线 s (图 224, a)。

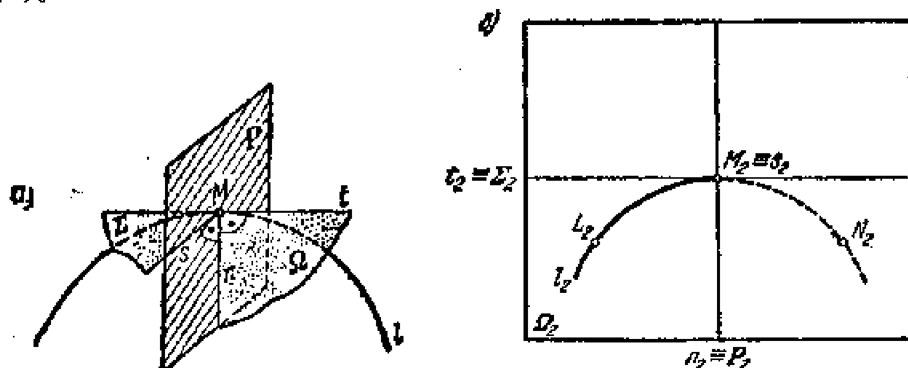


图 224

切线t、主法线 n 和副法线s在空间曲线的每一点M处确定一个直角三面形，称为基本三面形或流动三面形[①]（它随着点M一起沿曲线移动）。

基本三面形各棱面具有下列名称：密切面 Ω ($t \times n$)；法面 P($n \times s$)；化直面Σ($t \times s$)。

图 224, б 表示曲线 l 在取作正立投影面Ω_2的密切面 Ω 上的投影l_2。图上还表示了在这条曲线上的普通点 $M(M_2)$处所作的基本三面形的棱边和棱面的投影：$t(t_2)$、$n(n_2)$、$s(s_2)$和 Ω(Ω_2)、P(P_2)、Σ(Σ_2)。

在平面 Ω(Ω_2)前面的曲线的左边部分 L_2M_2 在投影中是可见的，而曲线的右边部分 M_2N_2，因为位在平面Ω (Ω_2)的后面而不可见。

§5. 平面曲线和空间曲线的近似作图法

1. 平面曲线的切线的近似作法

1) 过曲线外一已知点Q作曲线的切线（图 225)。过点Q引线束，交已知曲线m于 1、2、3、4……，并作出曲线q[②]，曲线 q 是弦 12、34、56 的中点的轨迹。

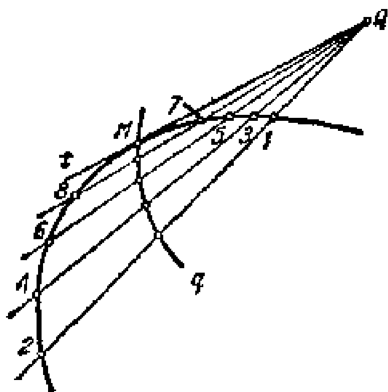


图 225

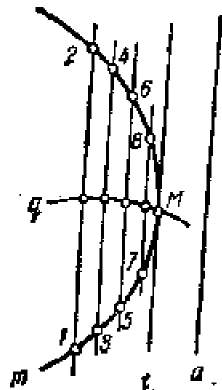


图 226

① 这个三面形也称为弗兰纳三面形，以纪念在 1847 年首先提出它的法国学者弗兰纳(Fr net)。

② 在各种近似的图解作图中常常要作类似这样的曲线，即所谓"误差曲线"。

在曲线m和q的相交处得到所求的切点M，过该点引切线QM。

2）平行于已知方向a作切线（图226）。引一系列平行于a的直线，它们与曲线m交于点1、2、3、4、……，过弦12、34、56的中点作误差曲线q，交曲线m于点M，点M即为所求的切点。切线t通过M并平行于直线a。

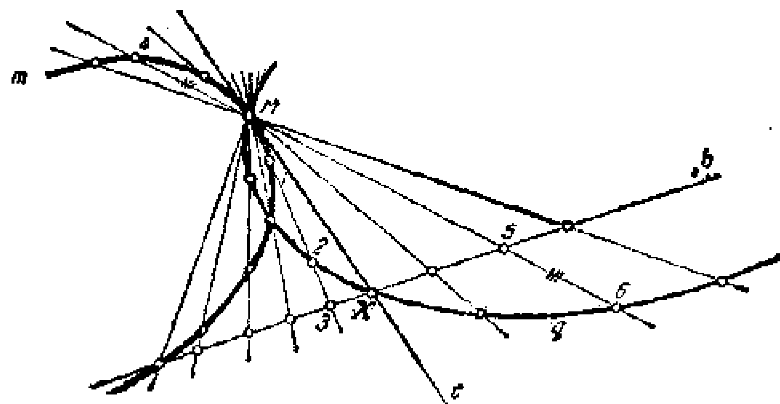


图 227

3）过已知的切点M作切线（图227）。引一辅助直线b，它大致垂直于所求切线的预期方向。过点M引线束，与曲线m和直线b相交，并分别从它们与直线b的交点起截取线段等于相应的割线所构成的弦的长度（$23=M1$、$56=M4$等等）。过点2、6……作误差曲线q，并标出它与直线b的交点X。直线$MX\equiv t$就是所求的切线。

2. 平面曲线的曲率

圆周的曲率 具有半径R的圆周，其曲率$k=\frac{1}{R}$，即圆周各点的曲率都相同且等于半径的倒数。圆周的半径同时是圆周的曲率半径$r_k=R$。圆周半径越大，它的曲率就越小（图228）。

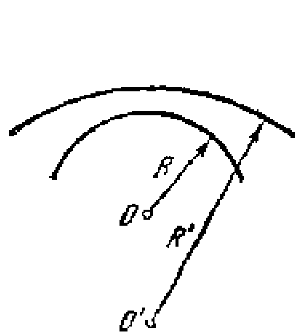


图 228

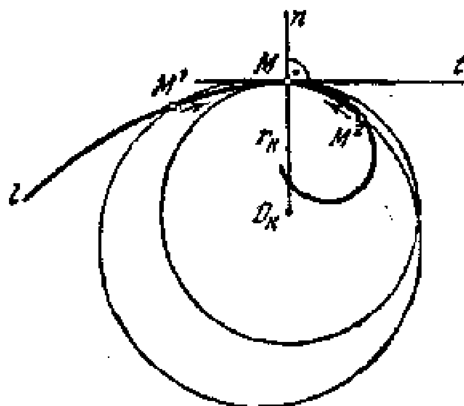


图 229

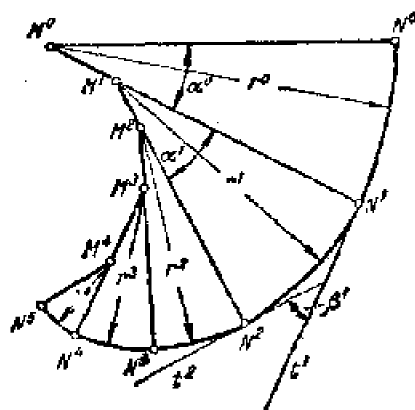


图 230

平面曲线的曲率 任意曲线上各个点的曲率是不同的，它可用曲率圆周（曲率圆）来确定。

过曲线l的点M及曲线上与点M无限接近的另外两个点M^1和M^2所作圆周的极限位置，称为曲线l在点M处的曲率圆周（曲率圆）（图229）。

曲率圆的中心O_k和半径$r_k=O_kM$称为曲线在已知点M处的曲率中心和曲率半径。曲线在点M处的曲率

是 $k=\frac{1}{r_k}$ 曲线在已知点附近的"弯曲"越大，则在该点处 k 就越大，而 r_k 则越小。例如，对于直线，$k=0$，$r_k=\infty$。

显然，曲率圆与曲线 l 在点 M 处具有公共的切线 t 和法线 $n\equiv O_k M$ $(n\perp t)$。

3. **渐屈线和渐伸线** 关于渐屈线和渐伸线的问题与平面曲线曲率的理论有直接关系。

渐伸线的作法可以这样来说明：

假设有一条柔软的但不能拉长的线，线的一端固定在折线 $M^0M^1M^2\cdots\cdots$ 的顶点 M^0 上，而在线的另一端固定一铅笔(图 230)。如果拉紧这条线，并使它的最初方向为 M^0N^0，然后将它绕在折线 $M^0M^1M^2\cdots\cdots$ 上，则线的自由端描绘出一条依次由几段不同半径的圆弧组成的中心曲线 $N^0N^1N^2\cdots\cdots$，各段圆弧的中心位在折线的顶点 M^0、M^1、$M^2\cdots\cdots$ 上，它们的半径：

$$r^0=M^0N^0,\quad r^1=M^1N^1,\quad r^2=M^2N^2\cdots\cdots$$

折线的边的方向与中心曲线上两相邻圆弧接合点处的法线一致，而长度等于两相邻圆弧半径的差：

$$M^0M^1=r^0-r^1,\quad M^1M^2=r^1-r^2 \text{ 等等。}$$

如图所见(参看图 230)，折线的两相邻边的夹角等于在中心曲线上两相应点处的切线的夹角：

$$\angle N^1M^1N^2=\angle\alpha^1=\angle\beta^1 \text{ 等等。}$$

当折线的边数无限增多并趋于极限时，就得到曲线 m 及与它对应的曲线 n (图 231)，曲线 n 称为曲线 m 的渐伸线，同时，曲线 m 称为曲线 n 的渐屈线[①]。

从渐屈线和渐伸线的作图方法可得出这些曲线如下的性质：1)渐屈线的切线是渐伸线上对应点的法线；2)渐屈线是渐伸线上各点的曲率中心的轨迹；3)每一给出的渐屈线对应于一族渐伸线，每一条渐伸线(图 231 上的 n、k、$l\cdots\cdots$)都由原来的线长所确定。

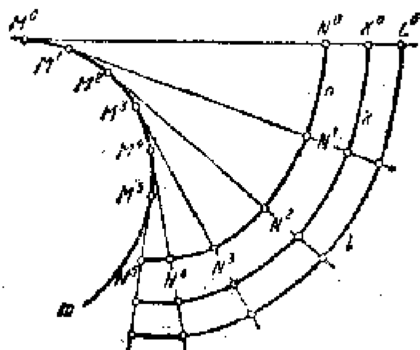


图 231

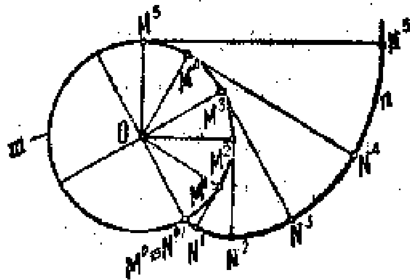


图 232

圆周的渐伸线(图 232)在各种工程构图中应用最为广泛。在图 233 上表示圆柱齿轮传动，它的齿形就具有圆周渐伸线的形状(所谓渐伸线啮合)。渐伸线齿形也可在蜗杆蜗轮传动中遇到[②]。

中心曲线，或称为畸变曲线，在工程上广泛应用作拱门、凸轮等的轮廓。图 234 表示的凸轮就是用畸变曲线作成的，这曲线具有给定尺寸 AB。

为了作这条曲线，以线段 AB 作为圆周的直径，并引它的另一直径 $CD\perp AB$ 作为曲线的对称轴。畸变曲线的各段圆弧的中心是 O、A、B 和 C。

所得的曲线是光滑的，在点 A、B、E 和 F 各有一条切线，并且在 ADB、BE、EF 和 FA 中每一段的曲率是不变的，但相邻两段的曲率却不相同。

---

① 渐伸线(эвольвента)来源于拉丁字"evolvens"，意思是展开的，渐屈线(эволюта)来源于拉丁字"evoluta"，意思是被展开的。

② 参看第七章§8之6。

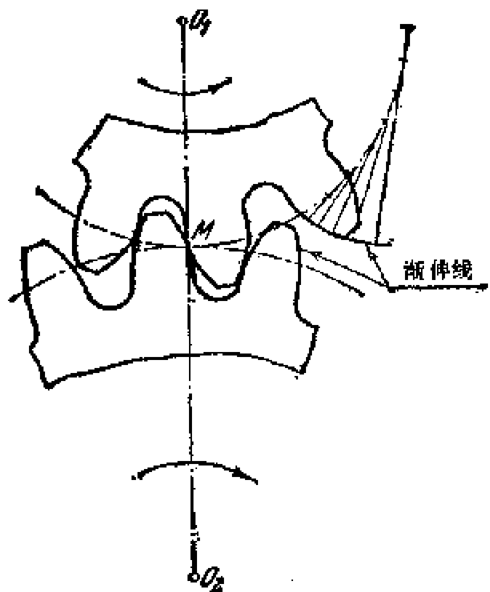


图 233

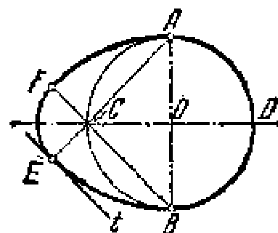


图 234

4. ①**展直曲线的近似方法** 为了度量（展直）畸变曲线（更确切地说是量出各段圆弧），常采用近似的方法，即利用射线 SA 和 SB 所截得的切线线段KL来测量圆弧ACB的长度（图 235）。点S 在直线 CO 的延长线上，距离 $CS=3R$。

在实用上，这种作法（当 $\alpha\leq60°$时）已足够准确。

用图解法展开时，经常要将曲面上的曲线展直或展开。为此，常常采用小弦法。正如这个方法的名称所示，是在要被展直或被展开的曲线（平面的或空间的）上作内接的折线，折线的每一段都是曲线的一段小弦。如果需要将曲线展直，则在一条直线上依次截取曲线的各段弦长，所得的整个线段就可作为曲线的弧长。

如果要将曲线展开在另一曲线上，则用已知曲线的各段弦首尾相接地截在这条曲线上。由此得到的整条弧就是展开了的已知曲线。

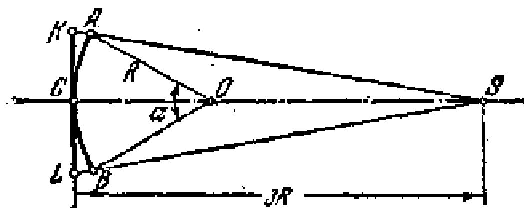


图 235

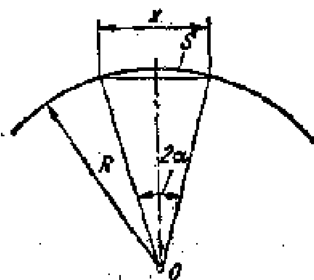


图 236

为了对这种小弦法的准确度有一个概念，现在来研究确定相对误差（规律误差）的公式，这个误差是由于用圆弧的弦来代替圆弧而产生的。

设有半径为R的弧，其内接弦长为 x（图 236）。与弦 x 对应的弧长用 s 表示，而中心角用 2α 表示。因为长度 $x=2R\sin\alpha$，而 $\alpha=\frac{s}{2R}$，所以 $x=2R\sin\frac{s}{2R}$。

① "4"是Г. Н. 费多托夫写的。

将正弦的表达式写成级数形式，就得到

$$x=2R\left[\frac{s}{2R}-\frac{1}{3!}\left(\frac{s}{2R}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{s}{2R}\right)^5-\cdots\cdots\right]$$

$$\approx 2R\left[\frac{s}{2R}-\frac{1}{6}\left(\frac{s}{2R}\right)^3\right]=s-\frac{1}{6}\cdot\frac{s^3}{(2R)^2}$$

$$\doteq s-\frac{1}{24}\cdot\frac{s^3}{R^2}。$$

弧 s 和它的弦 x 之间的差可用数值

$$\Delta=\frac{1}{24}\cdot\frac{s^3}{R^2}$$

来表示。如果我们用弧 s 的弦来代替 s，则由此而产生的相对误差等于：

$$f=\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{s}{R}\right)^2。$$

取比 $\frac{s}{R}$ 等于 $\frac{1}{4}$，并用一些长度与这个比相适应的弦来展直已知弧。这时所得的弧长的误差等于：

$$\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{384}\approx 0.26\%。$$

如果我们就取弦本身的长度等于弧的半径的四分之一，由此而对准确度的影响甚微。

可以说，在这种情况下，误差不超过 0.3%，对精密的图解作图是完全可以接受的。

根据上述理由，变曲率的平面曲线应该这样来展直：先将曲线分成几段，每段具有大致相等的曲率。然后近似地求出每段曲线的曲率中心和曲率半径。最后，每段曲线就可用弦来展直，而使这些弦等于该段曲线的半径的 $\frac{1}{4}$。

在用分规沿着曲线量取弦长以及沿直线截取弦长的过程中，由于分规的针尖不能恰好与这些线的中心重合，于是还产生了所谓偶然误差。弦长愈小（与半径比较），这种误差就愈大，因此不应将弦长取得太小。

当用上述方法展开曲线时，所得的误差还可以更小。

我们来研究用小弦法展直空间曲线的问题。

设曲线照常用两个投影给定（图 237）。先将曲线的一个投影（例如水平投影）象平面曲线那样展直为水平线段 $\bar{A}_1\bar{B}_1$。过该线段各分点引铅直线，在铅直线上截取投影 A_2B_2 上各点对于直线 $\bar{A}_1\bar{B}_1$ 的高度。结果，作出了曲线 $\bar{A}_2\bar{B}_2$，然后再象平面曲线那样将它拉直，就得到所求的弧 AB（A_1B_1, A_2B_2）的长度。不难看出，上述的作法，实质上是展开将已知曲线投射到水平投影面的投射柱面。

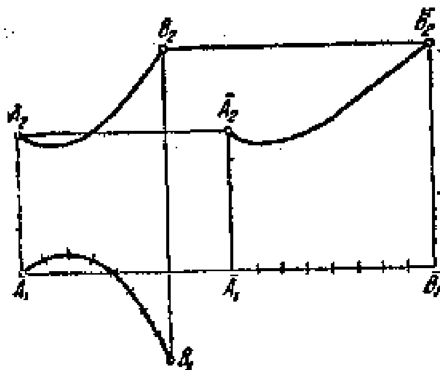


图 237

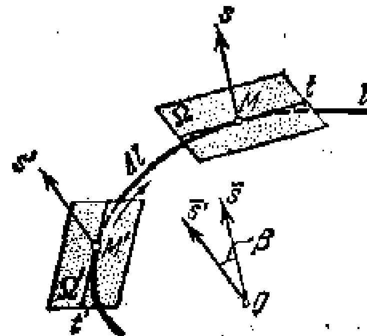


图 238

5. **空间曲线的曲率和挠率** 与本章§2中的平面曲线一样，空间曲线的曲率可由曲率圆、曲率半径和曲率中心来确定(参看图229)。

曲率圆以前定义为过曲线上三个无限接近的点的圆周的极限位置。曲线的密切面也作了同样的定义(参看本章§4之4)。

由此可得，曲线上确定曲率圆的三个点就是确定密切面的点，即曲率圆位在密切面上。

曲率圆的中心 O_k(曲线在点M处的曲率中心)位在曲线的主法线n上，其半径r_k就是曲率半径。

研究空间曲线时，除了曲率之外，还要引入挠率的概念。

前面已经指出，空间曲线的密切面随着从一点过渡到另一点而改变(图232)，这种改变愈剧烈，曲线的挠率就愈大。

在区域 $\widehat{MM^1}=\Delta l$ 上，曲线的平均挠率的数值由密切面在弧Δl区域上的旋转角β对这段弧长的比值来确定(图238)。

平面Ω'和Ω之间的夹角β可以用曲线l的副法线：$s'\perp\Omega'$和$s\perp\Omega$之间的夹角($\angle s'Os=\beta$)来度量。

当$\Delta l\to O$，即当$M^1\to M$时，比$\frac{\beta}{\Delta l}$的极限称为曲线l在点M处的挠率m：

$$m=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\beta}{\Delta l}。$$

挠率表明曲线与已知点M的密切面的接近情况。挠率愈小，曲线与密切面愈接近。

平面曲线在它所有的点处的挠率都等于零($m=0$)，因为平面曲线全部位在一个平面上，即位在曲线所有各点的公共密切面上。

§6. 螺 旋 线

1. 圆柱螺旋线是点沿着旋转柱面的母线作等速直线运动，而该母线又绕着柱面的轴线等速旋转时的运动轨迹。

图239表示的螺旋线$l\equiv M^0M^1M^2\cdots\cdots M^{12}$是由点$M$沿着依次占有$A^0B^0$、$A^1B^1$、$A^2B^2$等等位置的圆柱母线$AB$运动而形成的。这时圆弧$\widehat{A^0A^1}$、$\widehat{A^1A^2}$、$\widehat{A^2A^3}$等等彼此相等，而且每一段都等于$\frac{\pi d}{n}$，式中$d$为圆柱直径，$n$为圆周被等分数。

线段$A^0M^{12}=h$称为螺旋线的导程，数值$p=\frac{h}{2\pi}$称为螺旋线的参数，螺旋线的M^0M^{12}部分称为螺圈。

圆柱半径$r=\frac{d}{2}$及其轴i称为螺旋线的半径和轴。要给出螺旋线，必须给出数值h(或p)和r。

螺旋线的参数p确定了当母线AB转过的角度ψ等于一弧度时，点M沿该母线的直线移动z，即

$$p=\frac{h}{2\pi}=\frac{z}{\psi}。\tag{5}$$

圆柱螺旋线可以沿本身移动。在同一条螺旋线上的两段同一样的线段，可以把其中一段放在另一段上而互相重合。除了圆柱螺旋线外，只有直线和圆周才具有这种性质。

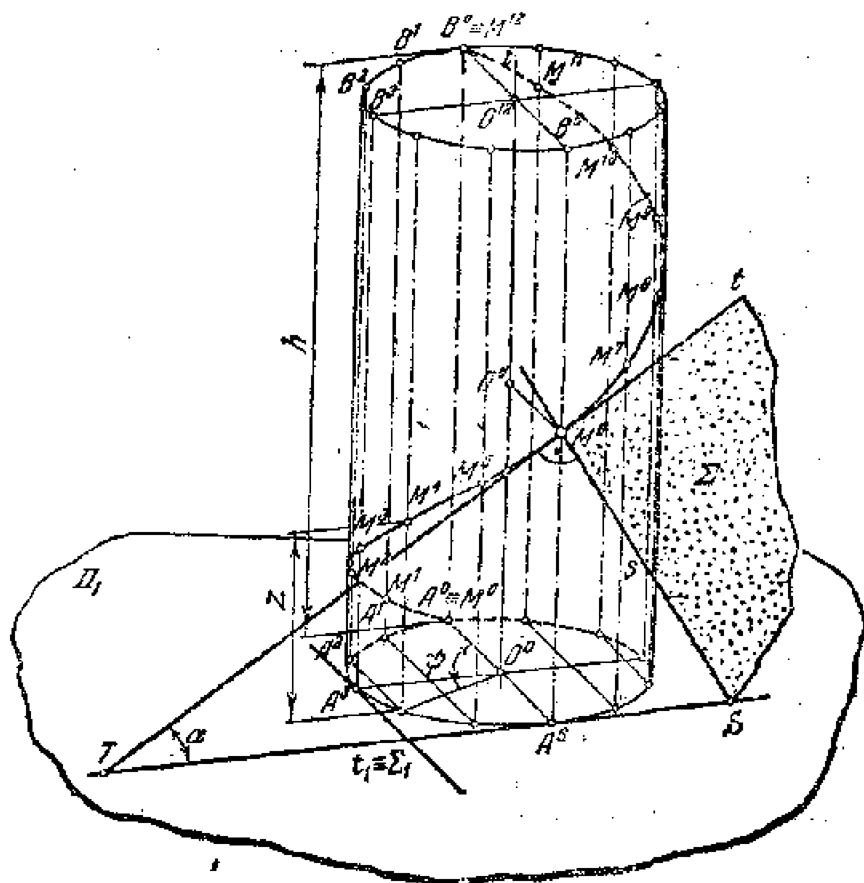


图 239

2. 螺旋线的参数方程具有下列形式(图 240):

$$x = r \cdot \sin\varphi;\quad y = r \cdot \cos\varphi;\quad z = p \cdot \varphi, \tag{6}$$

式中 φ 是绕轴 z 的旋转角。

在这个图上,螺旋线的投影是直接根据点沿旋转柱面运动而形成螺旋线的方法作出的。

要作螺旋线的投影,可将圆柱的底圆(即螺旋线的水平投影)分为若干等分,又在圆柱的轴线上截取一段等于导程 h 的线段,也分为相同等分,在我们所研究的图上是分为 12 等分的。

过各等分点引相应的水平线和铅直线,这些直线的交点就是螺旋线各点的正面投影。

为了得到螺旋线在平行于平面 xOz 的平面 Π_2 上的投影方程(参看图 240),应当从方程(6)的第一式和第三式中消去参数 φ,就得到正弦曲线的方程:

$$x = r \cdot \sin\frac{z}{p}。 \tag{7}$$

螺旋线可以是右旋的或左旋的。如果观察者沿螺旋线的轴向看到这曲线按反时针方向缠绕上升,则这螺旋线就称为右螺旋线。

与右螺旋线对称于某一平面的螺旋线称为左螺旋线[①]。观察者看到这种螺旋线是按顺时针

① 也可以由点沿螺旋线移动时密切面的旋转方向来确定螺旋线是右旋还是左旋(参看本章 § 4 之 6)。

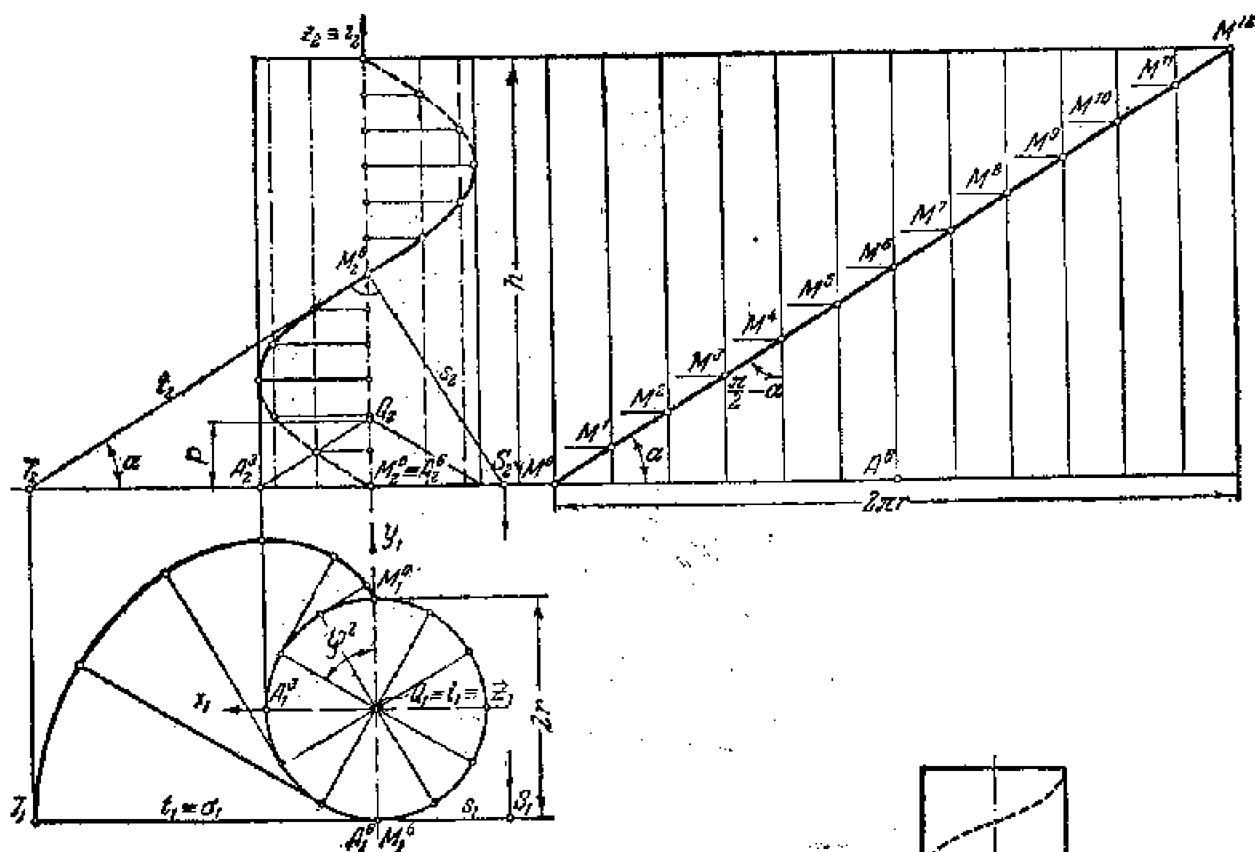


图 240

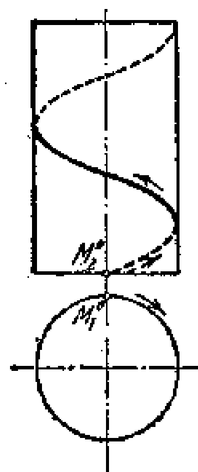


图 241

方向缠绕上升的。

图 240 画出的是右螺旋线，而图 241 画出的是左螺旋线。

3. 将圆柱面展开时，螺旋线在展开图上是一条与水平线成倾角 α 的直线(参看图 240)。

这可由螺旋线的形成规律直接得出：点完成了一次复合运动，这运动由沿圆周 $A^0A^1A^2$……的旋转(参看图 239 和 240）和沿垂直于圆周所在的平面的一条直线移动组成。圆周的相等的圆弧对应于点的相等的直线移动。在展开图上圆周 $A^0A^1A^2$……变为水平直线，因而这条直线上的相等的线段对应于点在铅直方向上的相等的直线移动。

总之，点的轨迹在展开图上是一条线，这条线上的点的纵坐标与横坐标成正比，因而这轨迹是一条直线。

所以，螺旋线与圆柱的所有母线交于定角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$。角 α 称为螺旋线的升角，并等于螺旋线上任一点 M^6 处的切线 t 的倾角(参看图 239 和 240)。

角 α 可由下式确定[参看图 240 和公式(5)]：

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{h}{2\pi r}=\frac{p}{r}=\frac{z}{r\psi}。\tag{8}$$

在圆柱面上两任意点间拉紧了的线是沿着螺旋线走的，这条线在该两点间所引的所有线段中是最短的，或是圆柱面上的测地线。

圆柱螺旋线的特点是线上各点的曲率和挠率均为常数。

4. 圆柱面的底可以当作某一圆锥面的底（参看图 240），其锥顶 Q 位在轴线上，而其母线则平行于螺旋线上各点处的对应的切线。

这个圆锥面称为螺旋线的导锥面。导锥面上所有的母线与底面的倾角是 α，而高度则等于 $r\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$，因此，根据公式(8)，此高度也等于螺旋线的参数 p。

在螺旋线的点 M^6 处的切线 t 平行于平面 Π_2，而且平行于导锥面的母线 QA^3（参看图 240）。

在图 239 和 240 上还表示出螺旋线的副法线 s，它与切线 t 一起确定化直面 Σ，化直面与圆锥面切于母线 A^6M^6，它是通过切线 t 而使螺旋线位在其同侧的唯一平面。

次切线线段 A^6T 等于圆柱底圆的弧长 $M^0A^3A^6$[1]（参看图 239 和 240）。由此得出结论，点 $T(T_1, T_2)$ 位在圆周的渐伸线上，亦即圆柱螺旋线上所有各点的切线的水平迹点，构成位在这个圆柱底面上的圆周渐伸线（参看图 240）。

圆柱弹簧具有螺旋线的形状，并且可以放在桌上象放在化直面 Σ 上一样（图 242）。桌面与弹簧的外圆柱面沿母线相切。弹簧在桌上的投影为正弦曲线（参看图 240）。

5. 圆锥螺旋线是点沿着旋转锥面的母线作等速直线运动，而该母线又绕着锥面的轴线等速旋转时的运动轨迹。

为了作圆锥螺旋线的投影，必须将圆锥的底圆和螺旋线的导程 h 分为相同等分（在图 243 上

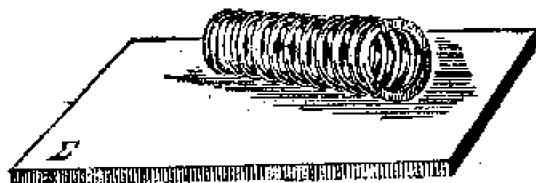
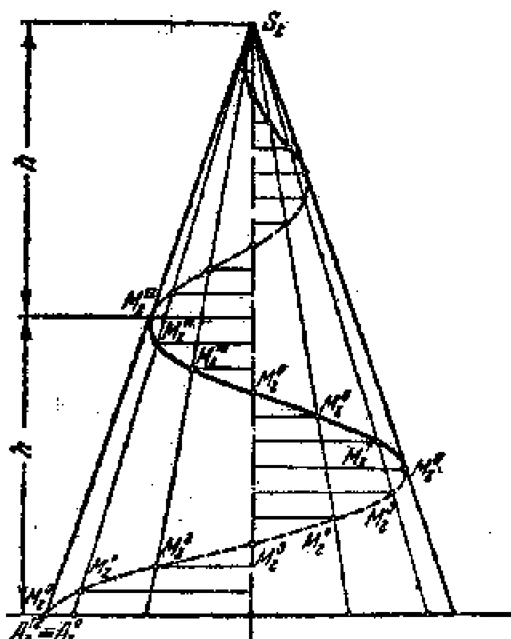


图 242



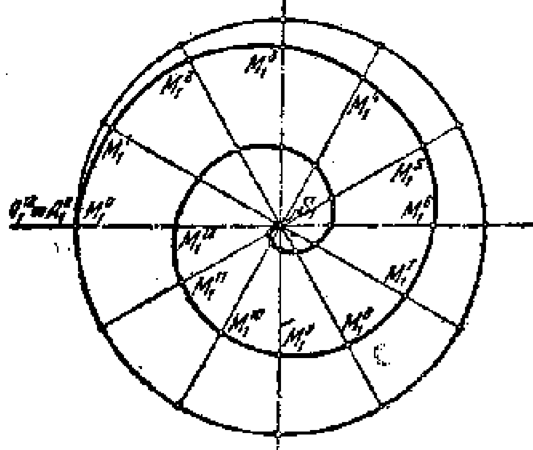


图 243

① 证明参看 H. Ф. 切特维鲁新等《画法几何教程》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1956 年版。

分为 12 等分)，并引圆锥的相应的母线。

动点沿母线的位移与母线绕圆锥轴线的角位移成正比．根据这一点就可找出动点在圆锥母线上的位置。

圆锥螺旋线的正面投影是表示在图 243 上的一条曲线，而它的水平投影是阿基米德螺线①。

在图 243 上作出了圆锥左螺旋线。

6．现在来研究一个例子。

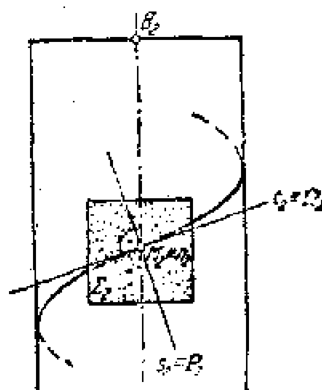


图 244

试过圆柱螺旋线上的点 M 作基本三面形的平面 Σ、Ω 和 P(图 244)(参看本章 § 4)。

过螺旋线上已知点 M 作切线 t，然后把圆柱转一下，使直线 $t(t_2)$ 平行于平面 Π_2。于是，由切线 t 和圆柱的母线 MB 确定的化直面 Σ 也平行于 Π_2。

垂直于平面 Σ 的主法线 n 投射为一点 $n_2\equiv M_2$，而密切面 $\Omega(t\times n)$ 投射为一直线 $\Omega_2\equiv t_2$。

位在平面 Σ 上的副法线 $s(s_2)$ 垂直于密切面 $\Omega(\Omega_2)$。现在，法面 P $(n\times s)$ 投射为一直线 $P_2\equiv s_2$。

这样一来，基本三面形的所有三个平面 Σ、Ω 和 P 以及它们的交线 t、n 和 s 就都作出来了。

复 习 题

1．什么是平面曲线和空间曲线？如何确定代数曲线(平面的和空间的)的次？

2．平行投射时，平面曲线的哪些性质保持不变？

3．什么是曲线的“奇异点”？它们在曲线上有什么特点？

4*．试写出二次曲线的普遍方程。为了确定它，应给出曲线的多少个点？

5*．试写出椭圆、双曲线和抛物线的标准方程。试给出这些曲线作为点的轨迹的定义。

6*．椭圆(双曲线、抛物线)的平行投影可能是什么曲线？

7．怎样定义空间曲线的密切面？

8*．什么是空间曲线的基本三面形？

9．试述平面曲线的切线的近似作法。

10*．如何确定曲线上已知点处的曲率？

11*．试给出平面曲线的渐伸线和渐屈线的定义。写出它们的基本性质。

12．试述圆柱螺旋线的定义。应当怎样配置投影面才能使圆柱螺旋线投射为圆周和正弦曲线？

13．螺旋线在什么升角下才变为圆周或直线？

练 习 题

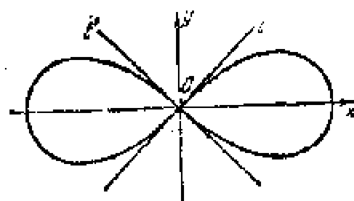


图 245

1．试证明图上的代数曲线(柏努利双纽线)的次不小于 4，并指出它的奇异点(图 245)。

2*．在什么条件下，位在一般位置平面 Ω 上且具有半轴 a 和 b 的椭圆投射到 Π_1 上成为圆周？

3*．求作圆锥螺旋线的基本三面形．设圆锥螺旋线的导锥面锥顶角为 30°，导程为 20 毫米。

① 证明参看 H．Φ．切特维鲁新等《画法几何教程》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1956 年版。

第七章　曲面·曲面的形成、在图上的给定和工程上的应用

§1. 基本概念和定义·曲面的解析给定法·用骨架给定的曲面

1. 在这以前我们已研究过一些几何形象的性质和相互位置，这些几何形象在复合图上的图象是不难想象的。事实上，表示一条直线只要给出直线上两个点的投影。表示一个平面只要给出该平面上不在同一直线上的三个点的投影。作多面体的图象归结为作它的网络的投影，多面体的网络由多面体的所有的顶点和棱边组成。

在所有这些情况里，所绘的几何形象都是在图上给定的，因为这个图足以确定这些形象的任何一个点。

这样，为了在图上给定直线、平面和多面体，只要给出它们数量有限但经严格确定的点或直线就够了。

对于曲面的图象来说，这个原则有时是不充分的，因为可能有些曲面不能用它的数量有限的特殊点或线给出。因此，要给定曲面常常采用别的方法。

2. **曲面的解析给定法**　解析给定法是一种可能的、而且正被广泛应用的曲面给定法。这个方法把曲面看作是点的轨迹，这些点的坐标满足于已知方程(代数曲面和超越曲面)。

如果曲面的方程 $\Phi(x, y, z)=0$ 是 n 次代数方程，则这曲面称为 n 次代数曲面。其中平面是用一次方程来表示，因而平面可以称为一次曲面。

n 次曲面既可定义为与任意平面相交于 n 次曲线(有时是分解的或虚的)的曲面，也可定义为与一条不完全属于该曲面的任意直线相交于 n 个点(实的或虚的)的曲面。

这两个定义是等价的。

例如，试研究用方程

$$-\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z。\tag{1}$$

来表示的曲面。

大家知道，这个二次代数曲面是双曲抛物面(图 246)。曲面的形状可以通过作出它的平截线来研究。

用平面 $xOz\,(y=0)$ 和 $yOz\,(x=0)$ 截得的截线(主截线)是抛物线：

$$x^2=-2pz,\tag{2}$$

$$y^2=2qz,\tag{3}$$

它们凹下的方向是相反的。

用平面 $xOy\,(z=0)$ 截得的截线由方程

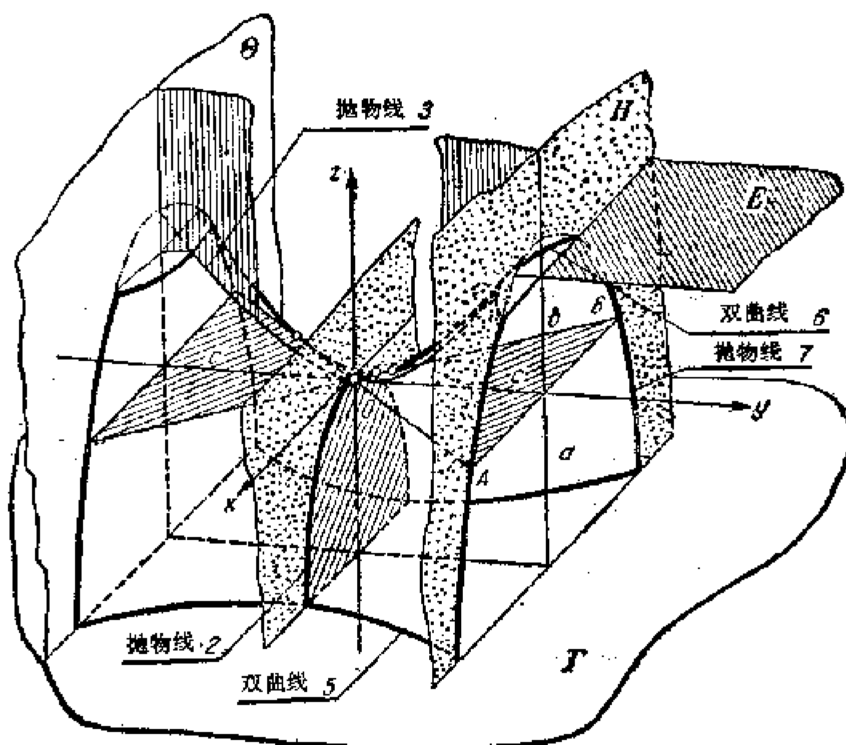


图 246

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0 \tag{4}$$

确定，它是一对直线 OA 和 OB:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \text{ 和 } \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0。\tag{4'}$$

在本章§5和§7中将说明，曲面上所得的这两条直线不是唯一的。它们属于布满整个曲面的两个直母线族。

用平行于平面 xOy 的平面 $z=h$ 截得的截线是双曲线。

例如，用平面 $\Gamma(z=-a)$ 截得的截线是双曲线：

$$\frac{x^2}{2ap}-\frac{y^2}{2aq}=1。\tag{5}$$

这双曲线具有平行于轴 Ox 的实轴，而用平面 $\mathrm{E}(z=b)$ 截得的是双曲线：

$$-\frac{x^2}{2bp}+\frac{y^2}{2bq}=1, \tag{6}$$

它具有平行于轴 Oy 的实轴。

用平行于平面 xOz 的各平面截得的截线都是抛物线。例如，用平面 $\mathrm{H}(y=c)$ 和 $\Theta(y=-c)$ 截得的是相同的抛物线，其方程是：

$$x^2=-2pz+\frac{pc^2}{q}。\tag{7}$$

比较方程(2)和(7)时，我们发现这些方程所确定的抛物线彼此相等。其中抛物线(7)的顶点

朝平行于轴 Oz 的方向对抛物线(2)的顶点移动了 $\frac{pc^2}{q}$。

所作的分析说明，双曲抛物面可以由抛物线(7)运动形成(参看图 246)，该抛物线的对称轴恒在平面 yOz 内，并总平行于轴 Oz，顶点则沿抛物线(3)移动，而且运动着的抛物线的平面恒平行于平面 xOz。

从力学中知道，这种运动称为平行移动①。

当某一曲线(母线)作平移运动，而曲线上的某一个点描绘出另一条曲线(导线)时，所形成的曲面称为移动曲面。因此，双曲抛物面可以看作是移动曲面。

3. **用骨架给定的曲面** 有时曲面可以由其上若干条线(线的总和)给出。这些线的总和称为骨架。用骨架给定的曲面是不完全确定的，因为用同样的骨架也可以构成别的曲面，只是彼此稍有不同。

这种曲面在图上是用骨架曲线的投影给定的。所得的图的特点是曲面上不在骨架曲线上的点只能近似地作出。

这种在图上给定曲面的方法是用来绘制不遵循任何几何规律的曲面的。

试研究几个例子。

图 247 表示由两个线族 m 和 l 给定的曲面的模型。模型由纵向的和横向的肋 A 和 B 构成。肋上有槽，以备装配时连接之用。将装配好的骨架 C 蒙起来，就得到曲面 Φ，这个曲面还单独画在图上(参看图 247, D 和 E)。

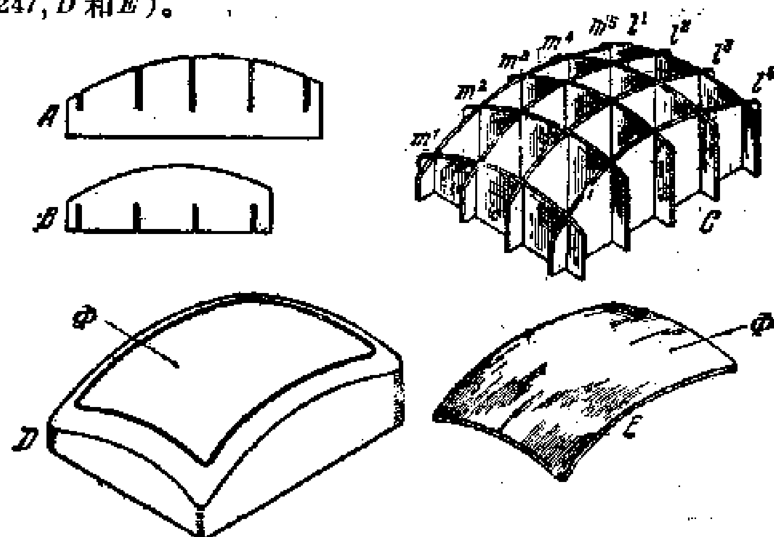


图 247

飞机、汽车等等的外壳就是由类似的曲面组成的。

例如，试研究图 248 所示的飞机机身的外壳。外壳的曲面 Φ 用骨架的投影给出，骨架由位在水平面 $\Gamma(\Gamma_2)$、$E(E_2)$ 和 $\Theta(\Theta_2)$(用水平线 3、4 和 5 表示的平面)的线族(水平线)和位在正平面 $A(A_1)$、$P(P_1)$ 和 $\Sigma(\Sigma_1)$(用纵切线 0、1 和 2 表示的平面)的线族(纵切线)组成。

---

① 如果曲线移动时连接曲线上一对点的每一条弦恒相互平行，则曲线的这种移动称为平行移动。在运动学上，形体(其中包括曲线)平行移动的特征是形体上所有的点具有同样的速度。

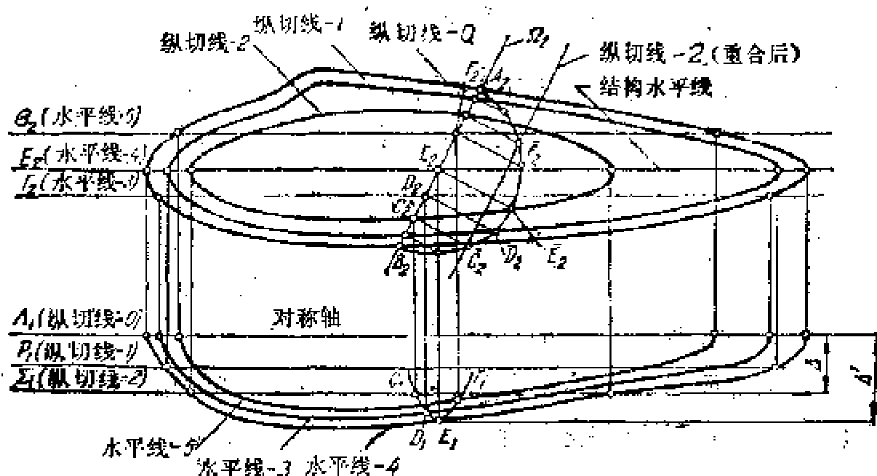


图 248

图上表示出用平面$\Omega(\Omega_2)$截机身曲面而得的斜截线的水平投影及其实形的作法。为此标出了平面Ω与纵切线A_2、B_2、C_2……及与水平线D_2、E_2、F_2……的交点。截线的水平投影由点C_1、D_1、E_1、F_1……确定。

将平面Ω绕正平线$AB(A_2B_2)$旋转，使它与平面Π_2重合。为了在重合后的位置作截线的点，引直线通过标出的点并垂直于直线Ω_2，在这些垂线上截取的长度使对应于纵切线的号码或水平线上各个点的深度。例如，为了作出位在纵切线-2 上的点C_2，截取线段$C_2\overline{C}_2$使等于纵切线-2到对称轴的距离$\varDelta$；为了作出位在水平线-4 上的点$\overline{E}_2$，截取$E_2\overline{E}_2$使等于点E_1的深度$\varDelta'$。

根据找到的点而用曲线板连起来的曲线$C_1D_1E_1F_1$……和$A_2\overline{F}_2\overline{E}_2\overline{D}_2\overline{C}_2B_2$（参看图 248）当然都是近似的。这与由骨架给定的曲面Φ一样，不是完全确定的。

4．在地形学中表示地面形状时，常取水平线作为骨架曲线。

这样给出的曲面称为地形曲面(图 249)。

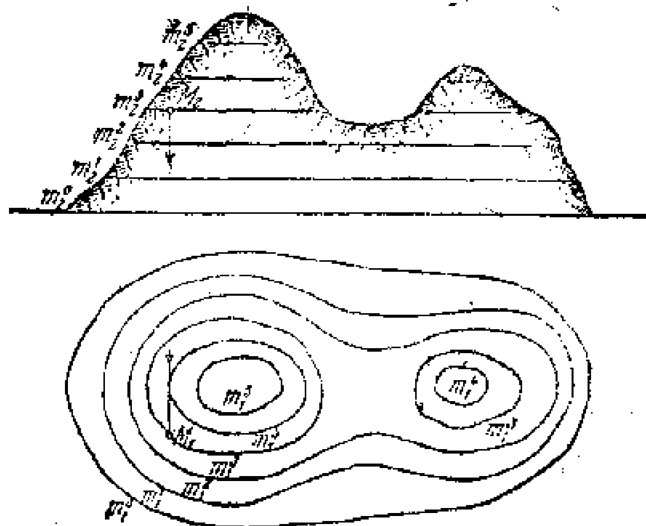


图 249

§2. 运动曲面·曲面的确定要素和曲面在图上的给定·曲面的外形线

1. 画法几何主要是用运动方法来研究曲面的形成的。这就是说，曲面由线(母线)在空间按一定规律连续移动而成。这时曲面本身也将是连续的。当母线的位置改变时，母线的形状或者保持不变，或者无论是形状及其空间位置都连续改变。

这样，运动曲面的形状便取决于母线的形状和它在空间移动的规律。

每一种类型的运动曲面通常都有定义，这个定义表示出母线的形状和它在空间移动的规律，而有时，例如对于旋转曲面或直纹面(母线是直线①)，只要表示这两个要素中的一个即可。对于后一情况，第二个要素(对旋转曲面来说是母线的形状，对直纹面来说是母线的运动特征)并不影响把这个曲面归属于正被确定的类型②。

2. 现在来说明可以用什么元素在空间给定某一类型的曲面。显然，这就是能唯一确定曲面的形状和大小的那些元素。这意味着，我们会得到必需的资料来作所研究的曲面，因而就可以在曲面上作出任意的母线(一般是曲线)和点。

把已知曲面从其所属的某类型曲面中区分出来的那些曲面元素(参数)的总和称为曲面的确定要素。

例如，大家知道，旋转锥面由轴线和母线完全给定(图 250, *a*)。因此锥面 Θ 的确定要素便写成：$\Theta(i, l)$。

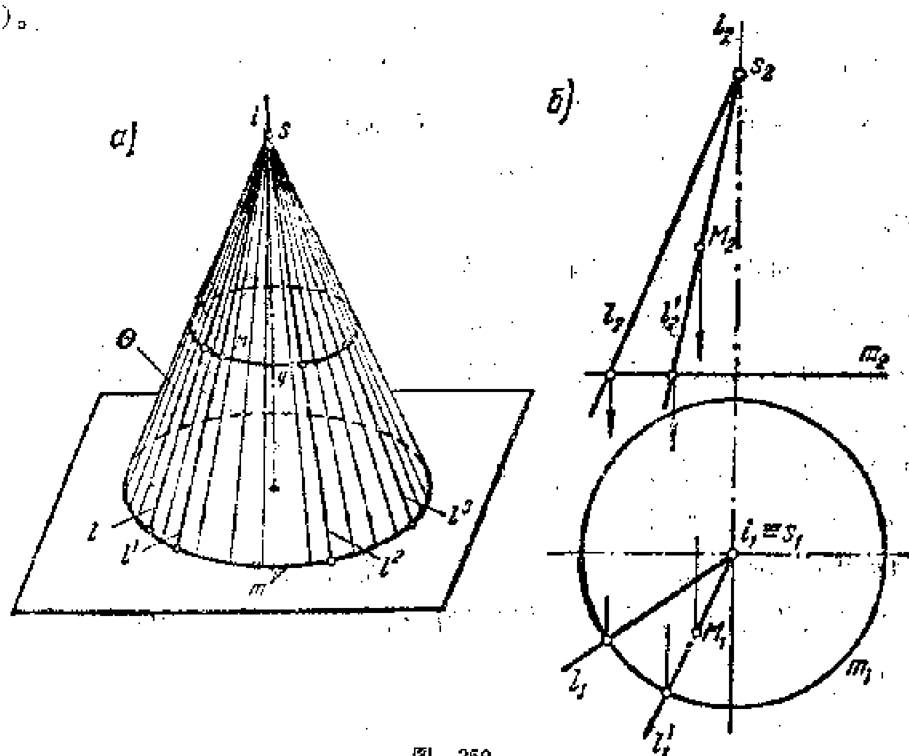


图 250

① 分别参看本章§3和§6。

② 对于用解析法给定的曲面(例如，二次曲面)，其定义具有另外的特征(参看本章§5)。

应该指出，所述的锥面给定法不是唯一的。关于这个问题后面将有更详细的叙述。

给定旋转锥面的轴线 i 和母线 l 就可以作出这个锥面(参看图 250, a)。在这个锥面上我们当然可以引出曲面的任何其它直母线（l^1、l^2、l^3……）或圆周（q, m）以及标出曲面的任意点(M)。

我们注意到，只要能够在原形中作出运动曲面的任何母线即等于给定了该曲面。以后我们常常就把“曲面的确定要素”这个概念与作出该曲面的任何母线的可能性联系起来。

3. 研究过关于在原形中给定曲面的基本原理之后，就可以转到**在复合图上作曲面的投影图。**

这时，我们应解决的基本问题可叙述如下：**给出曲面上哪些几何元素的投影才能得到曲面的可逆图(或度量上确定的图)呢？**在这种图上，**曲面的任何一点都将是确定了的，**因而**曲面完全给定。**

显然，在图上应当给出曲面上这样的几何元素(点和线)的投影，以便根据这些元素就可以找出曲面的确定要素，因而也就找出该曲面的原形本身。**特别是，曲面可以在图上用它的**确定要素**的投影给定。**

曲面的这种图解给定法在度量上是确定的，因而可以解决曲面上的任何定位问题和度量问题，甚至可以把曲面重新制作出来。

例如，上面已经断定，旋转锥面的确定要素由它的轴线和母线组成：$\Theta(i, l)$。因此，为了在图上给定锥面，只要给出它的确定要素的投影：$i(i_1, i_2)$和 $l(l_1, l_2)$就够了(参看图 250, $б$)。

4. 描绘曲面的曲线(母线)在空间的移动规律，可以方便地用运动母线所沿着滑动的一些不动的曲线给定。这些不动的曲线称为导线，它们常常是曲面的确定要素的组成部分。

这样，在任何运动曲面上都可分出两族曲线：**母线族**(l)和**导线族**（m），每一族曲线都布满整个曲面，并且每一族都可由任意形状的曲线（平面的或空间的）组成 (图 251)。如果将母线和导线互调，即取 m 作为母线，而取 l 作为导线，结果还是得到同一个曲面 Φ。

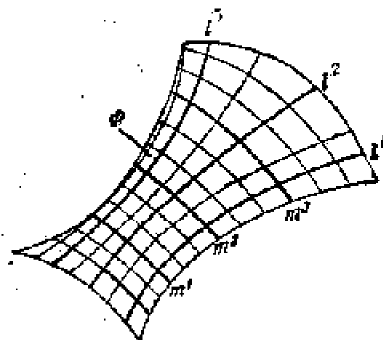


图 251

运动曲面的**骨架**可以由上述的两线族的曲线 l^1、l^2、l^3……和 m^1、m^2、m^3……来组成。

如果考虑到母线移动的连续性，因而也就是考虑到曲面本身的连续性，就可以作出一个对运动曲面的理论非常重要的结论，即**通过曲面的任何一点可以引一对属于曲面上两个不同线族的曲线。**

5. 上面说过，在曲面的可逆图上不仅能作出它的母线，而且能解决与这曲面有关的任何定位问题和度量问题①。**作曲面上的点的投影**是最简单和最基本的定位问题，并可作为解更复杂

① 参看第八、九、十和十一章。

的定位问题或度量问题的基础。

求任一曲面上的点 $M(M_1)$ 的第二个投影 M_2，可用**一般方法**，即过点 M 的已知投影 M_1 引属于曲面的两线族之一的线 $l(l_1)$。然后作出这条线的第二个投影 l_2，并过点 M_1 引连系线。点 M 的第二个投影 M_2 便位在所引的连系线与线 l_2 的相交处。至于选择哪一个族的线较好，取决于这些线的作图是否简单。例如，对于直纹面常用它的**直母线**(例如，参看图 250, б)，对于旋转曲面则用**圆母线**(曲面的纬圆)等等①。

顺便提一下，对平面来说，这问题可用平面上的直线来解。

6. 为了说明上述的道理，试研究几个具体的曲面的形成和在图上给定的方法。

在图上给定一个由若干个点或线所确定的运动曲面，可归结为给定这些点或线的投影。同时要注意到**补充图形的某些条件**。

例如，试研究**球面**和**旋转柱面**的形成。

球面可以用球心和球面上一点的投影给出(图 252, a)。这时应想象出图上所给出的就是一个球面而不是线段 OA。球面的确定要素是 $E(O, A)$。

过点 O 和 A 引水平投射面 $\Gamma(\Gamma_1)$，并把它绕铅直轴 i 转到正面位置(图 252, б)，就找到球面上一个大圆的投影 $\bar{m}(\bar{m}_1, \bar{m}_2)$。将圆 $\bar{m}$ 绕轴 i 旋转就形成一个球面。这时球面的确定要素是 $E(i, \bar{m})$。

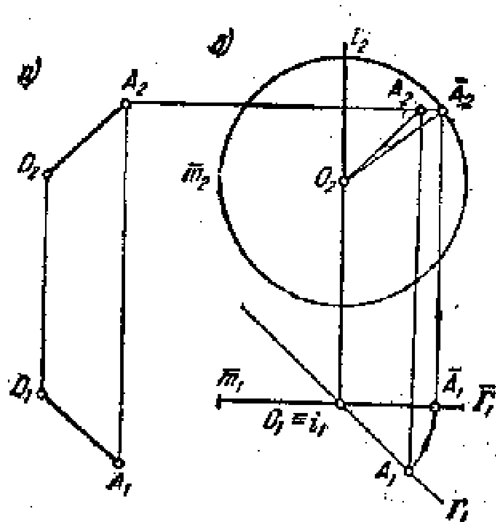


图 252

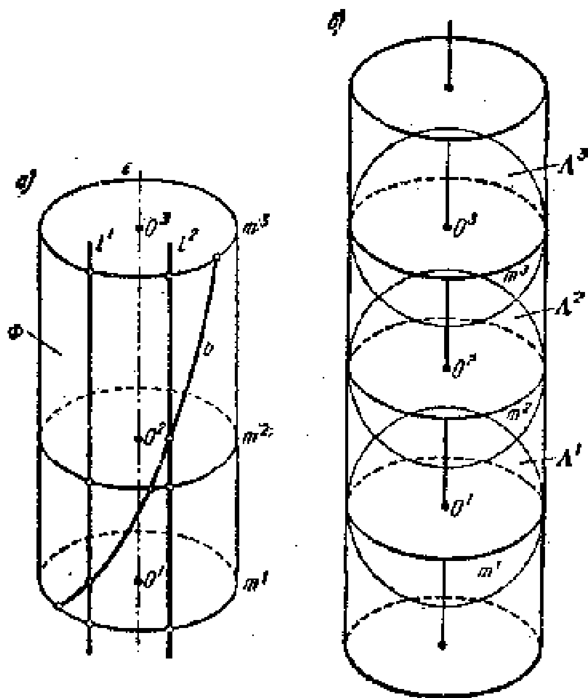


图 253

现在来研究具有轴 i 和母线 l 的**旋转柱面** Φ(图 253, a)。该曲面的确定要素由轴 $i(i_1, i_2)$ 和母线 $l(l_1, l_2)$ 组成：$\Phi(i, l)$。

柱面也可以由位在其表面上的曲线 b **旋转**而成，或由圆 m：m^1、m^2、m^3……**平行移动而成**

① 参看本章§3、§6和§7。

（移动曲面）。

在这些情况下，曲面的确定要素应当表示如下：$\Phi(i, b)$，$\Phi(i, m)$。

上述这些例子说明：一个曲面可用不同的方法形成。在实用上，可以从各种可能的曲面形成方法和各种可能的母线形状中，选取对曲面作图和解题最简单、最方便的一种。

7．包络面　运动曲面也可以用别的方法形成：即用母曲面的运动而不是象以前那样用线的运动来形成。这时运动着的曲面便形成一个称为族的曲面集合。

从微分几何知道，如果曲面在它的每一个点处都与已知族的某一曲面相切，则这曲面称为已知族的包络面。

例如，旋转柱面可以作为球心（O^1、O^2、O^3……）位在直线 i（圆柱轴线）上的单参数球面族（Λ^1、Λ^2、Λ^3……）的包络面而形成。这柱面与球面沿大圆（m^1、m^2、m^3……）的圆周相切，这些圆周称为特征线（参看图 253，б）。曲面的确定要素是 $\Phi(i, R_\Lambda)$，这里 R_Λ 是母球面的半径。

8．在画法几何里对图样的基本要求除了有可逆性之外，还要有直观性。曲面用其确定要素的元素的投影给定时，虽能保证图样的可逆性，但不能保证其直观性。因此为了增加曲面的图象的直观性，在许多情况下，除了在图上表示出确定曲面的点和线的投影外，还要表示出曲面的外形线。这样，在“曲面的投影”这个概念里通常便包含着曲面的外形线和确定曲面的几何元素（点和线）的投影。

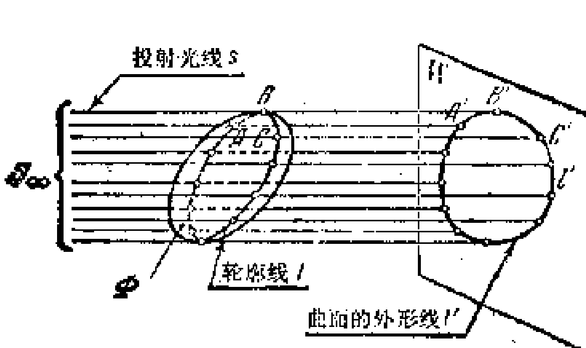


图　254

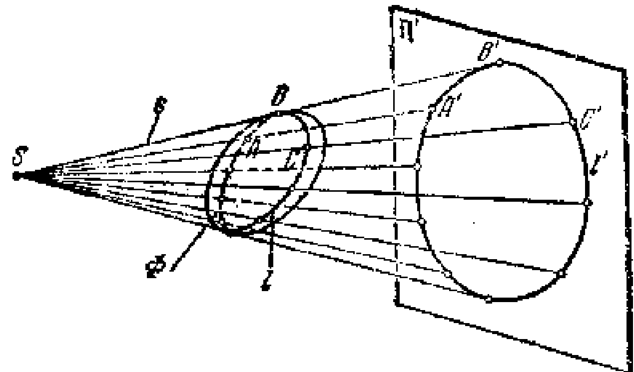


图　255

设想将某一任意曲面 Φ 平行投射或中心投射到投影面 Π' 上（图 254 和 255）。这时，可以分离出与曲面 Φ 相切而形成某个投射面的投射光线，这个投射面在平行投射时是柱面、在中心投射时是锥面。投射面与已知曲面的切线 l 称为轮廓线。投射面与平面 Π' 的交线 l' 称为已知曲面 Φ 的外形线。

这样，曲面外形线是作为轮廓线在所给投影面上的投影而作出的。

曲面外形线是曲面在所给投影面上可见部分的边界。它给曲面上各个点的投影从投影面上所有其它的点中划出一个配置范围。因此在复合图上表示曲面时，轮廓线在其它平面上的投影称为可见性线。

在图 256 上画出了球面的两个投影，球面在平面 Π_1 和 Π_2 上的外形线是圆 q_1 和 m_2。在另

一个投影面上，这些圆投射为可见性线 q_2 和 $m_1$①。

9. 我们要转而研究在各种技术领域的实践中得到广泛应用的几种运动曲面。这几种曲面是②:

1) 旋转曲面，它由任意的母线绕不动的轴旋转而成，其中包括二次旋转曲面；
2) 一般形式的二次曲面；
3) 直纹面，它可由直线运动而成；
4) 螺旋面，由任意的母线作螺旋运动而成，其中也包括直纹螺旋面；
5) 循环曲面，它可由圆周(定直径的或变直径的)运动而成。

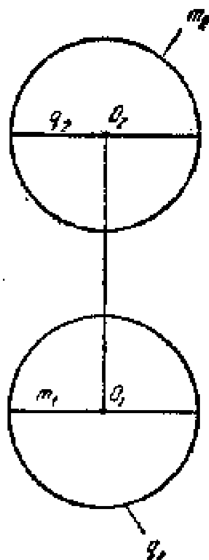


图 256

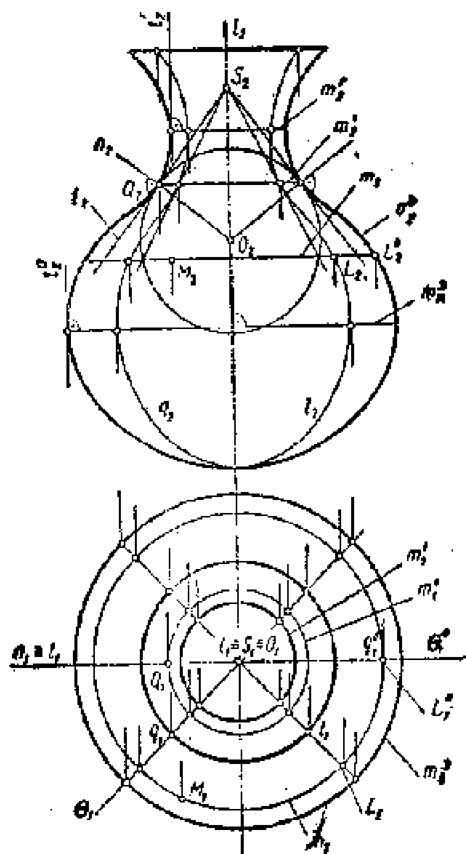


图 257

§3. 旋转曲面·它的形成和在图上的图示给定

1. **定义** 由任意曲线(母线)绕不动的轴旋转而描绘出的曲面称为旋转曲面。

母线既可以是平面曲线，也可以是空间曲线。为了给定旋转曲面，必须给出它的轴 i 和它的任意一条母线 l，旋转曲面的确定要素是：$\Phi(i,\ l)$。用这些要素的投影就可以在图上给出曲面(图 257)。

① 关于作曲面外形线的问题在第八章有详细的研究。
② 对这几种曲面的更详细的确定方法可参看下文。

曲母线 l 上的每一个点 L 旋转时描绘出一个圆周 m，其圆心在轴 i 上。这些圆周称为曲面的纬圆。

用通过轴 i 的平面 $\Theta(\Theta_1)$ 截割曲面所得的曲线 q 称为子午线。曲面对称于任一子午面；而所有的子午线是全等的。在图 257 上母线 l 位在其中一条子午线上。

如果把旋转曲面这样放置，使其轴 i 垂直于投影面 Π_1，所有的纬圆投射到这个平面上并不变形。位在正平面 $\Theta^0(\Theta_1^0)$ 上的子午线 q^0 也称为主子午线，它投射到平面 Π_2 上反映实形并确定曲面在这个平面上的**外形线**。为了作出主子午线上的点，必须把曲母线 l 上的点旋转到与主子午线平面 Θ^0 重合[例如，图 257 上的点 $L^0(L_1^0, L_2^0)$]。

在复合图上旋转曲面常常选取垂直于投影面的轴 i 和主子午线来给定：$\Phi(i, q^0)$。

当曲子午线 q^0 旋转时，线上任意点 Q 的切线 t 形成一个旋转锥面，锥顶 S 在曲面 Φ 的轴上。这个锥面与旋转曲面切于圆周 m^1。

纬圆 $m^э$ 和 $m^г$，即最大的纬圆和最小的纬圆，称为曲面的赤道圆和喉圆，凡通过这两个圆上的点而切于曲主子午线 q^0 的切线都平行于旋转轴（$t^э \parallel t^г \parallel i$）。这些圆投射到 Π_1 上为圆周外形线。当子午线绕轴 i 旋转时，切线 $t^э$ 和 $t^г$ 形成投射柱面，因此，这些投射柱面是**外切**和**内切**于曲面 Φ 的旋转柱面。

在曲面的可逆图上，如上所述，不仅能够作出母线，而且能够作出曲面上的点。为此可利用曲面的骨架曲线。

旋转曲面的骨架多半是由子午线或纬圆组成（或者由它们共同组成）。在这种情况下，为了找出曲面上的点 $M(M_2)$ 的第二个投影（参看图 257），只要过 M_2 引纬圆 $m(m_2)$ 并找出它的水平投影 m_1 就可以了，所求的点 M_1 必位在这投影上。

这样，**旋转曲面的投影**通常可由确定曲面的几何元素（轴和母线）和某些骨架线——赤道圆、喉圆、顶纬圆（有时是底纬圆）、主子午线——组成，因为这些线给出曲面在投影面上的**外形线**。

2. 在各种技术领域里，旋转曲面应用得非常广泛，这可用旋转运动的普遍性和旋转曲面在机床上便于加工来解释。

为了补充上面所述，还应指出旋转曲面的下列重要性质，这些性质在计算和设计各种机器零件和机构时经常用到。

1) 可移动性，即旋转曲面绕轴旋转时，曲面可以沿其本身移动而不变形。这种只有**圆柱面**和**螺旋面**才具有的性质与圆、直线和螺旋线的类似性质有关。

2) 子午线是旋转曲面上两点间的最短线，这种线属于所谓曲面的测地线，它相当于平面上的直线。

3) 旋转曲面的每个纬圆与所有子午线相交成直角。

的确，如从图 257 上所见，在子午线上的点 Q 处的切线 t，垂直于在圆 m^1 的同一点处所引的切线（圆的切线在图上没有表示出来）。

这样，纬圆和子午线在旋转曲面上构成正交网络，类似于平面上的笛卡儿直角坐标网络。

4) 在旋转曲面上任一点处的法线①与曲面的轴相交。譬如，过点 Q 所引的法线 $n(n_1, n_2)$ 与轴 i 相交于点 O。直线 n 绕轴 i 旋转时描绘出一个法锥面。

内切于旋转曲面的球面，其半径由线段 OQ 确定。如果选择曲面上其它的点，这个球面可能是外切的。

因此，对任何旋转曲面都可能作出内切的和外切的球面。

3. **定理1** 当平面的或空间的 n 次代数曲线绕任意轴旋转时，就形成代数旋转曲面，在一般情况下，它是 $2n$ 次的。

我们不去讨论这个定理的证明，而只以子午线是二次曲线（即椭圆、抛物线或双曲线）的旋转曲面作为例证（图 258）。

假定，旋转轴 s 不是二次曲线的轴。那么，可以在曲线所在的平面上找出这样的一条垂直于轴 s 的直线（$a \perp s$），这条直线与曲线相交于两个点。

在图 258 上这些点是双曲线上的点 A 和 B、抛物线上的点 C 和 D 以及椭圆上的点 E 和 F。

每一条这样的二次曲线绕轴 s 旋转时都形成一些旋转曲面，这些旋转曲面在垂直于旋转轴的平面上各有两个不同的圆周。这样，就有一些直线（例如 a）与旋转曲面相交于四个点，即所得的曲面是四次的（更确切地说是不低于四次）。

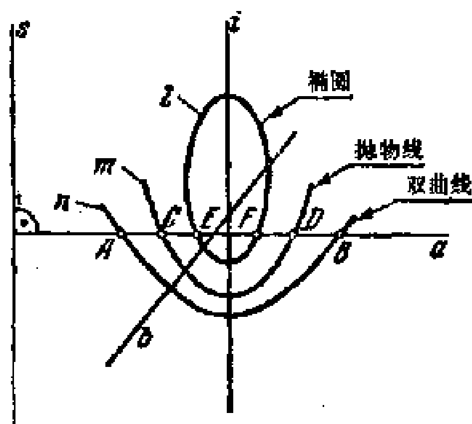


图 258

4. 在机器零件上常常遇到称为环状面的旋转曲面。它是当圆周绕位在该圆周所在的平面

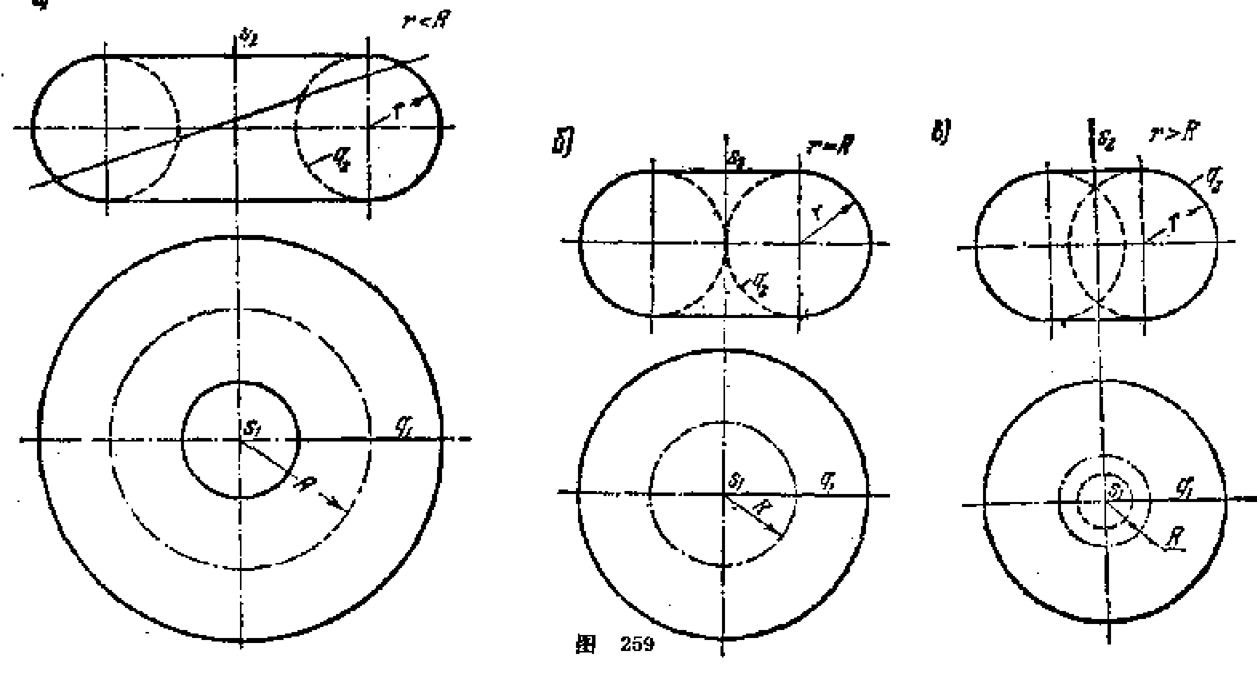


图 259

① 参看第八章。

上，但不通过圆心的轴旋转而得到的(图 259)。

根据圆周母线的半径 r 与圆心到轴的距离 R 之比可以产生三种不同的曲面：

1) $r<R$——圆周与轴不相交——开放的环状面(圆环面)(图 259, а)。

2) $r=R$——圆周与轴相切——闭合的环状面(图 259, б)

3) $r>R$——圆周与轴相交——闭合的环状面(图 259, в)。

任意直线与环状面交于四个点，因此，这种曲面不低于四次①。

图 260 画出一个轴承座。它由环状面($r>R$)和圆环面($r'<R'$)以及圆柱面和平面围成，圆柱面和平面分别用符号"Ц"和"П"表示。

当旋转轴通过圆周母线的中心线时，得到的就不是环状面而是球面，即得到的是二次曲面而不是四次曲面。

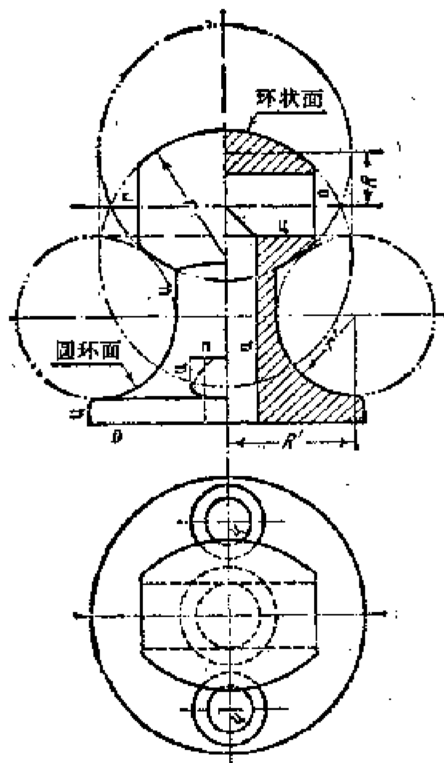


图 260

§4. 二次旋转曲面

1. 当二次曲线绕它的轴旋转时就形成二次旋转曲面。

这个命题可以用解析法严格证明，现在用下面的理由来作几何上的解释。

设曲面 Φ^l、Φ^m 和 Φ^n 是由二次曲线 l、m 和 n 绕这些曲线的轴 i 旋转而成的(参看图 258)。这时，点 A 和 B、C 和 D、E 和 F 成对地离开轴 i 相同的距离，当曲线绕该轴旋转时，这些点描绘出三个圆，即每一对点描绘出一个。这样，直线 $a\perp i$ 与每一旋转曲面相交于两点。这交点数对应于曲面 Φ^l、Φ^m 和 Φ^n 的次。

对于任意的直线 b 也是如此(图 258)。这时必须记住双曲线还有第二支，这一支在图上没有表示出来。

2. 二次旋转曲面可以有下列形式(表 1)

1) 旋转椭球面，由椭圆绕其轴线旋转而成。取椭圆的短轴或长轴作为曲面的轴，我们便分别得到压缩的或拉长的椭球面。

旋转椭球面是有界曲面，因此可以在图上完全画出来。

如果椭圆母线变为圆周，则旋转椭球面变为球面。

2) 旋转抛物面，由抛物线绕其轴 Oz 旋转而成。

---

① 在解析几何中已证明，环状面是四次代数曲面。

3）单叶旋转双曲面，由双曲线绕其虚轴 Oz 旋转而成。

4）双叶旋转双曲面，由双曲线绕其实轴 Oz 旋转而成。

5）旋转锥面，由分解为两条相交直线的二次曲线绕其轴 Oz 旋转而成。

6）旋转柱面，由分解为两条平行直线的二次曲线绕其轴 Oz 旋转而成。

二次旋转曲面的投影的作法与一般形式的旋转曲面的投影的作法相同，只是作为母线的不是任意曲线而是二次曲线 l^2——曲面的子午线(参看表1)。

曲面的确定要素是：$\Phi(i, l^2)$。

点在旋转曲面上的位置可利用通过这个点的纬圆或直母线来确定(参看表 1)。

二次旋转曲面 表 1

序号	曲面的名称	曲面的复合图	曲面的直观图
1	旋转椭球面		
2	旋转抛物面		

续表

序号	曲面的名称	曲面的复合图	曲面的直观图
3	单叶旋转双曲面		
4	双叶旋转双曲面		

续表

序号	曲面的名称	曲面的复合图	曲面的直观图
5	旋转锥面		
6	旋转柱面		

3. 单叶双曲面也是直纹面。它可由直线 a 绕与它交叉的轴 i 旋转而成(图 261)。直线 a 旋转时就形成了曲面 $\Gamma(i, a)$ 的一族直母线。

直线 i 和 a 的公垂线线段 OA 是双曲线的喉圆 k 的半径。

因为旋转曲面对称于子午面 $E(E_1)$，所以有了一条直母线 a，就可以找到另一条直母线 b，因为它与 a 对平面 E 成镜面映射。

将母线 a 转过 180° 而到达它的新位置——直线 $\bar{a}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ 时，它与母线 b 交于点 B。这样，通过单叶旋转双曲面上的一个点，可以引两条属于不同族的母线，而且同一族的任何两条母线都

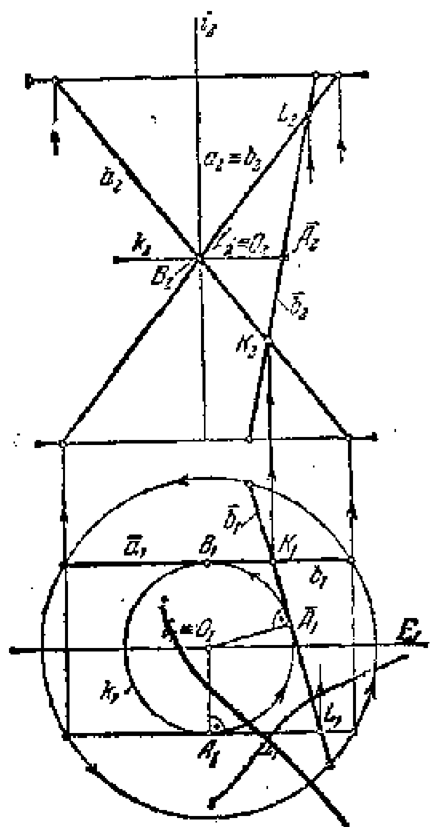


图 261

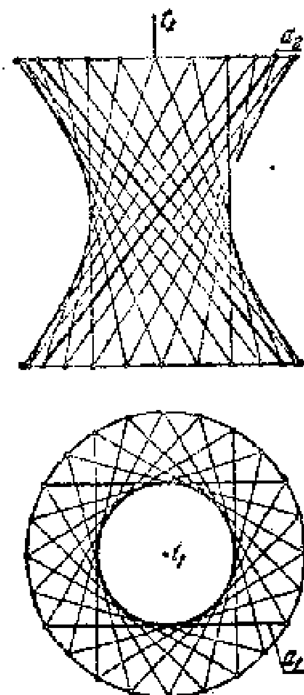


图 262

不相交。反之，一个族的每一条母线与第二族的全部母线都相交(图 262)。

曲面的骨架可以由这两族直母线组成。

图 261 上还画出第二族的一条母线 $\bar{b}$，它与第一族的母线 a 和 $\bar{a}$ 交于点 L 和 K。

圆 k 的中心 O 是旋转双曲面的中心，又是它的渐近锥面的顶点(参看表 1)。

为了作双曲面的主子午线，只要将直线 a 上一系列的点(A、C、E、G……) 绕轴 i 转到平面 E 上，使这些点的水平投影位在直线 E_1 上就可以了(图 263)。

在正面投影上得到曲面的主子午线 $\bar{A}_2$、$\bar{C}_2$……$\bar{G}_2$，这是双曲线的一支①。作出与它对称的另一支，就得到曲面在平面 Π_2 上的外形线。

作出直线 i 和 a 的公垂线 OE，就可以求得双曲面的喉圆。

4. 人们在建筑工程中利用了单叶双曲面具有两族直母线这一特性。利用这一特性的设想是由著名的俄国工程师、苏联科学院名誉院士舒霍夫(В. Г. Шухов, 1853—1939)提出的。

在 В. Г. 舒霍夫所建造的无线电杆、支柱、塔等结构中，金属杆是按单叶旋转双曲面的直母线的位置来配置的(图 264)。

这种结构很稳固而又轻便，因此广泛应用在建筑工程中。

① 证明可参看 А. И. 多布尔雅科夫《画法几何教程》，第 136 页，莫斯科—列宁格勒，国家建筑工程和建筑材料书籍出版社，1952 年版。

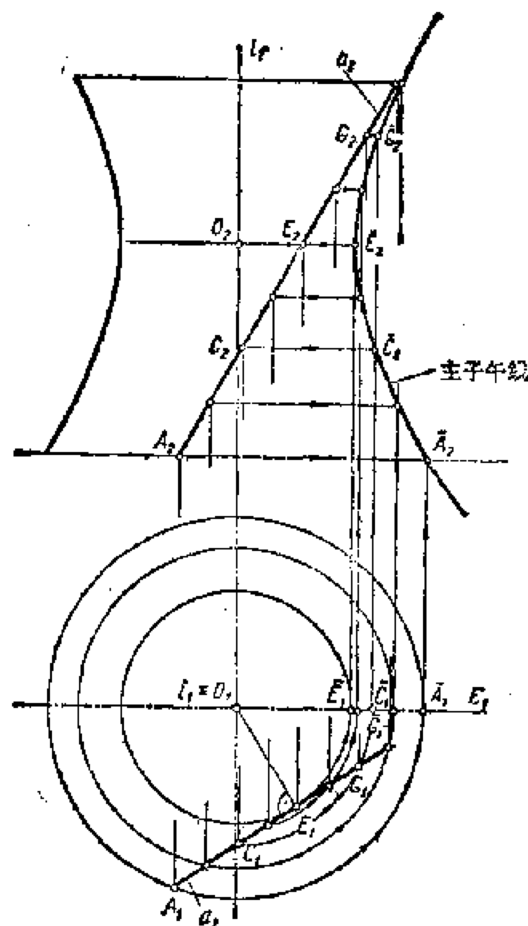


图 263

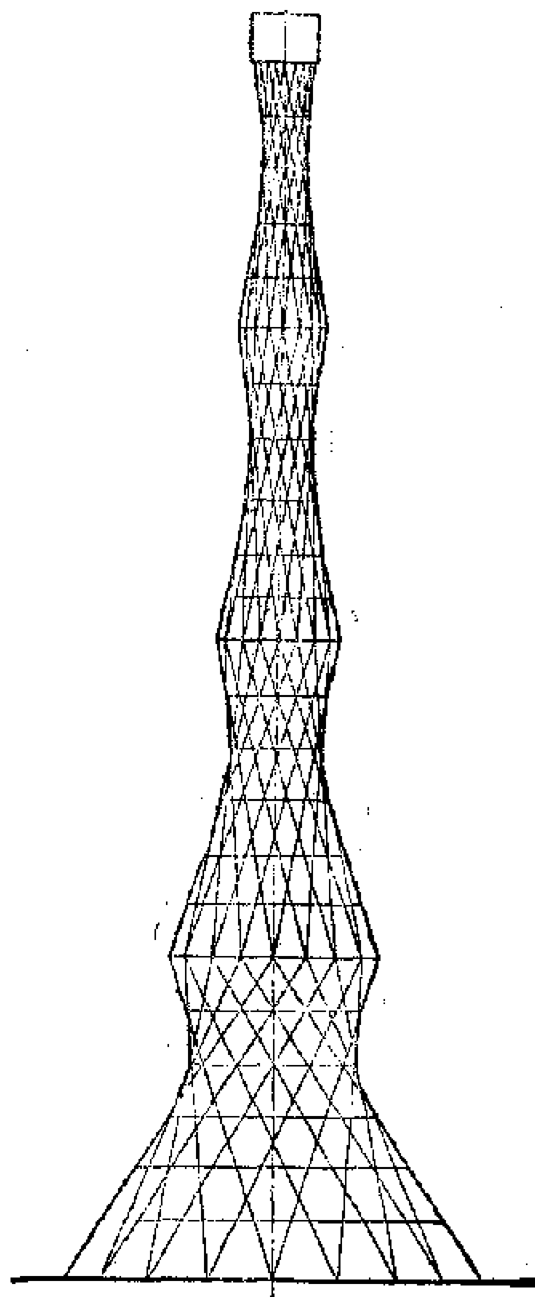


图 264

二次旋转曲面非常广泛地应用于机器制造业和其它技术领域里。机器和机构的各种零件就是由这些曲面围成的。

图 265 所示的齿轮传动具有交叉成直角的轴线，这种传动是利用圆锥齿轮来实现的。图 266 画出了两个相切于直母线l的单叶旋转双曲面Γ和Ω，曲面的轴a和b交叉成角度$\theta=\theta'+\theta''$，且具有最短距离E。这些曲面可以用它们的公共母线l及轴a和b给定：$\Gamma(a, l)$和$\Omega(b, l)$。在图上（参看图 266）划分出双曲面的一部分侧表面，即在轴a和b之间传递旋转运动的机构的齿轮工作面。

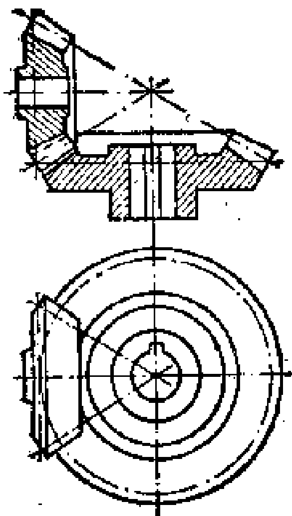


图 265

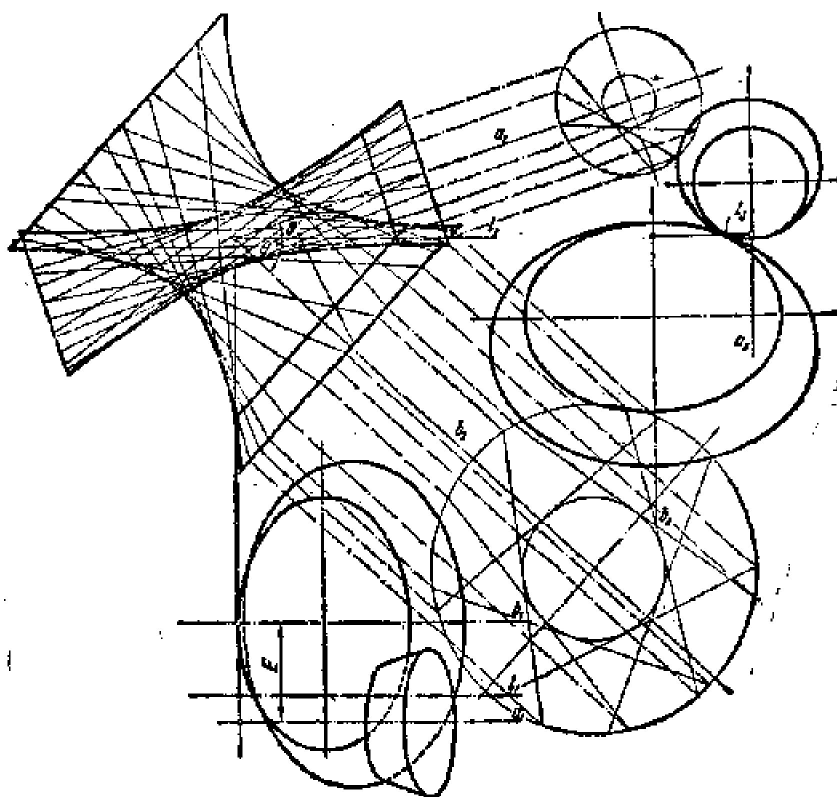


图 266

§5. 一般形式的二次曲面·它们的解析给定和图示给定

1. **定义** 在空间笛卡儿坐标系中由二次方程所表示的几何形象称为二次曲面。

二次曲面的普遍方程具有下列形式:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+K=0。\tag{8}$$

如果把这个包含十项的方程除以其中一个系数(例如 A),这时便得到确定已知曲面的九个系数比$\left(\frac{B}{A},\frac{C}{A},\frac{D}{A}\cdots\cdots\right)$或**九个参数**。在这种情况下,曲面的确定要素由上述九个参数组成。在几何上,这表示二次曲面完全可以由**九个独立元素**(例如九个点)确定①。

如果在讨论中除去二次锥面和二次柱面②、二次曲面退化为一对平面的情况以及虚曲面,则可以证明③,每一个二次方程(1)在简化之后可得到下面的形式之一:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\tag{9}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\tag{10}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\tag{11}$$

① 可以给出曲面的九个切面或用曲面的点和曲面的切面的任何组合来代替点,只要组合中的元素的总数等于九。

② 参看本章§6之2。

③ 参看 И. И. 普里瓦洛夫《解析几何学》,国家技术理论书籍出版社,1955 年版。

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \tag{12}$$

$$-\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z。 \tag{13}$$

与这些方程对应的曲面称为：椭球面[方程(9)]、单叶双曲面[方程(10)]、双叶双曲面[方程(11)]、椭圆抛物面[方程(12)]、双曲抛物面[方程(13)]。

可以利用对应的二次旋转曲面的直观图(参看表1)作为曲面(9)、(10)、(11)、(12)的直观图。

双曲抛物面(13)表示在图246上(本章§1之2)。

2. 具有唯一的有限的中心(对称中心)的曲面称为二次中心曲面。

在所研究的曲面里，曲面(9)、(10)、(11)属于二次中心曲面。坐标原点是这些曲面的对称中心，而坐标面是对称面[①]。因此，这些二次曲面有**三个**与坐标面 $x=0, y=0$ 和 $z=0$ 重合的**对称面**。用这些对称面截割曲面而得的截线称为曲面的主截线，这些主截线以及用平行于对称面的平面截得的截线都不难根据方程作出来。

图267表示分别位在平面 $x=0, y=0, z=0$ 的椭球面[方程(9)]的主截线：椭圆 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

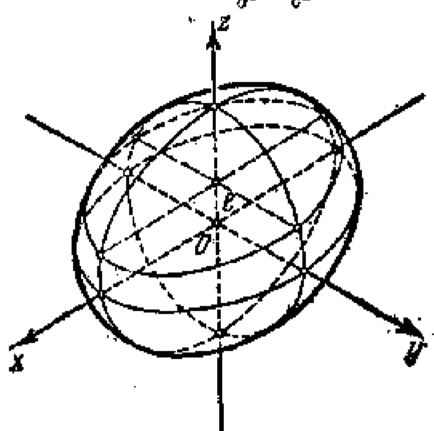


图 267

在水平面 $z=e$ 上的截线是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{e^2}{c^2}。$$

抛物面(12)和(13)是二次非中心曲面，并各有两个对称面，即平面 xOz 和 yOz（参看图246和表1）[②]。

在特殊情况下，方程(9)、(10)、(11)和(12)可以确定本章§4研究过的二次旋转曲面。如果在方程(9)中 $a=b$，它就确定具有旋转轴 Oz 的旋转椭球面[③]（参看表1），而当 $a=b=c$ 时，则确定一个球面。

在方程(10)和(11)中，当 $a=b$ 时，就得到旋转双曲面，而在方程(12)中，当 $p=q$ 时，就得到具有旋转轴 Oz 的旋转抛物面(参看表1)。

二次曲面的显著特征之一是所有这些曲面(除抛物柱面和双曲柱面以及双曲抛物面之外)都有圆截线，即这些曲面可能与平面相交于圆。

3. **二次曲面**可以作为用解析法给定的曲面的典型例子。上面已经举了一个用**解析几何**方法研究一种这类曲面(**双曲抛物面**)的例子(参看本章§1)。

然而，在画法几何里研究这些曲面的主要目的是探讨它们在图上的图示给定法。为此，显然要先找出曲面上便于图示给定的**确定要素**。

上面(本章§5之1)已经指出，二次曲面可以用它的**九个点**给出。

大家知道，二次曲面还可以用成对地彼此相交的三条**圆锥截线**给出。用**三条轮廓线**给出曲面时在投影面上便得到给定曲面的可逆图的**三条外形线**。

总之，在一般情况下，二次曲面的图可用曲面在投影面上的三条外形线给出。

然而，如果取曲面的对称面作为投影面，则为了在图上给出二次曲面，只要在两个投影面上给出它的外形线就可以了。

---

①、② 二次锥面、特别是旋转锥面、椭圆柱面和双曲柱面也属于中心曲面，而抛物柱面属于非中心曲面(参看本章§6之2)。

③ 当 $a=c$ 或 $b=c$ 时，同样得到具有旋转轴 Oy 和 Ox 的旋转椭球面。

某些二次曲面 表 2

序号	曲面的名称和确定要素	用曲面的确定要素给出的曲面图示图象及曲面上任意母线和点的作法
1	椭 球 面 $E(m, q)$	
2	单叶双曲面 $\Gamma(m, q)$	

续表

序号	曲面的名称和确定要素	用曲面的确定要素给出的曲面图示图象及曲面上任意母线和点的作法
3	双叶双曲面 $\Sigma(m, q)$	
4	椭圆抛物面 $P(m, q)$	
5	双曲抛物面 $\Omega(m, q)$	

这时对于中心曲面(表 2 的 1、2、3 号)必须选择确定实主截线的对称面（例如，对于双叶双曲面不应取水平投影面）。对于非中心曲面(4、5 号)可采用它本身具有的两个对称面。

这样，曲面的确定要素便包含了**两条轮廓线** m 和 q。

曲面的可逆图便由曲面的确定要素的投影[$m(m_1, m_2)$和 $q(q_1, q_2)$]，即曲面在两个投影面上的外形线组成(参看图 256 和表 2)。这时应该注意到一个**补充条件**，即**在图上的图象是二次曲面中的一种**。

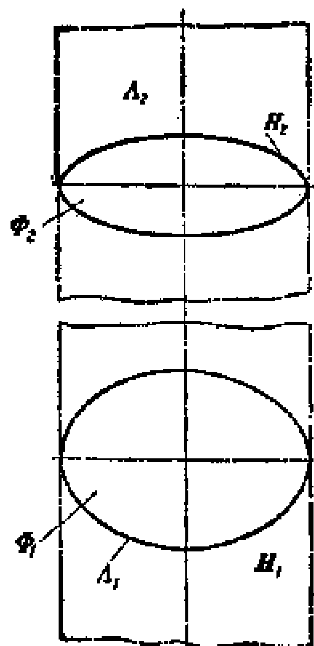


图 268

在图上如果可以作出曲面的任何母线便足以证明曲面的图形是可逆的。在一些曲面的图上(参看表 2)说明了位在平面 Θ 上的曲母线 a 的作法，这些母线有相似的椭圆(1、2、3、4 号)，有不变的抛物线（5 号)。还表示出在曲面上的点的作法。

要在双曲抛物面上作点 M，可以利用不变的抛物线 $q(q_2, q_3)$，曲面即由这曲线运动而成。作图过程在图上用箭头表示(参看表 2)。

当然，表 2 所示的方法对在图上绘制二次**锥面**和二次**柱面**也是适用的。不过，为了给定这些曲面，也可以用适用于任何形式的锥面和柱面的一般方法(参看本章 § 6 之 2)。

应当注意，如果曲面的图形不补充上述条件，这图形的可逆性便会消失，因而就不可能作出曲面的母线。的确，从图 268 看到，用表现为椭圆形状的投影 Φ_1 和 Φ_2 给出的形体 Φ，不仅可以看作是椭球面，而且可以看作是由两个相交的投射柱面 H 和 A 组成的物体。对图形的理解没有唯一的答案，便证明这个图不具有“可逆性”这个特性。

因此，补充图形的这个**条件**等于用椭圆的相似变化运动，或者用抛物线的不变运动来给出曲面形成的运动条件。

如果将研究过的给定双曲抛物面的两个方法进行比较，这两个方法是把双曲抛物面作为**移动曲面**(参看图 246)给出或作为**二次曲面**给出(参看表 2)，就显得特别清楚。

在这两种情况下，曲面的定义是不同的。在第一种情况里，曲面是作为**运动曲面**来确定的，也就是用母线的运动规律来确定，而在第二种情况里，曲面作为**点的轨迹**来确定，点的坐标满足于曲面方程。

同时，曲面的确定要素在两种情况下又是相同的：$\Omega(m, q)$（参看图 246 和表 2)。

其它的二次曲面也有类似的情况。

4. 在本章 § 4 中谈到了单叶旋转双曲面是**直纹面**。可以证明，**一般形式的单叶双曲面**和**双叶双曲面**都有两族直母线[①]，并且同一族的母线彼此不相交，反之，一族的每一条母线与另一族的全部母线都相交。

因此，这种曲面可以由直线运动而成(直纹面)[②]。

这样一来，在所有的二次曲面中，只有锥面、柱面、单叶双曲面和双曲抛物面是**直纹面**，同时，对于后两种曲面，在它们上面的每一个点都有两条直母线通过。

§ 6. 直纹面·它们的形成和在图上的图示给定

1. 定义 直线在空间运动而形成的曲面称为直纹面。

根据母线运动的特征就得到不同类型的直纹面。

---

① 这个问题在解析几何里已经证明了。参看 И. И. 普里瓦洛夫《解析几何学》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1959 年版。

② 参看本章 § 6 和 § 7。

试研究这类曲面的几种类型。

2. 锥面和柱面

锥面是由具有不动点 S(顶点)的直线 l(母线)沿曲线 m(导线)移动而形成的(图 269, a)。

柱面则是由具有固定方向 s 的直线 l(母线)沿曲线 m(导线)移动而形成的(图 269, б)。

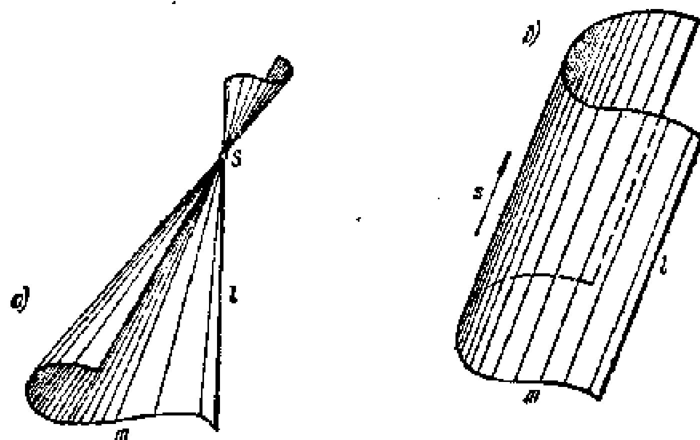


图 269

因为具有同一方向(即彼此平行)的所有直线相交于无穷远(非固有)点 S^{∞}, 所以柱面可以看作是锥面的特殊情况。这时, 直母线上的无穷远点 S^{∞} 就是不动点。

如果曲面的导线是由直线段组成的折线, 则柱面就变为棱柱面, 而锥面就变为多面角①。

在复合图上给出锥面和柱面时, 经常选用曲面与一个投影面的交线 m 作为导线 (图 270)。

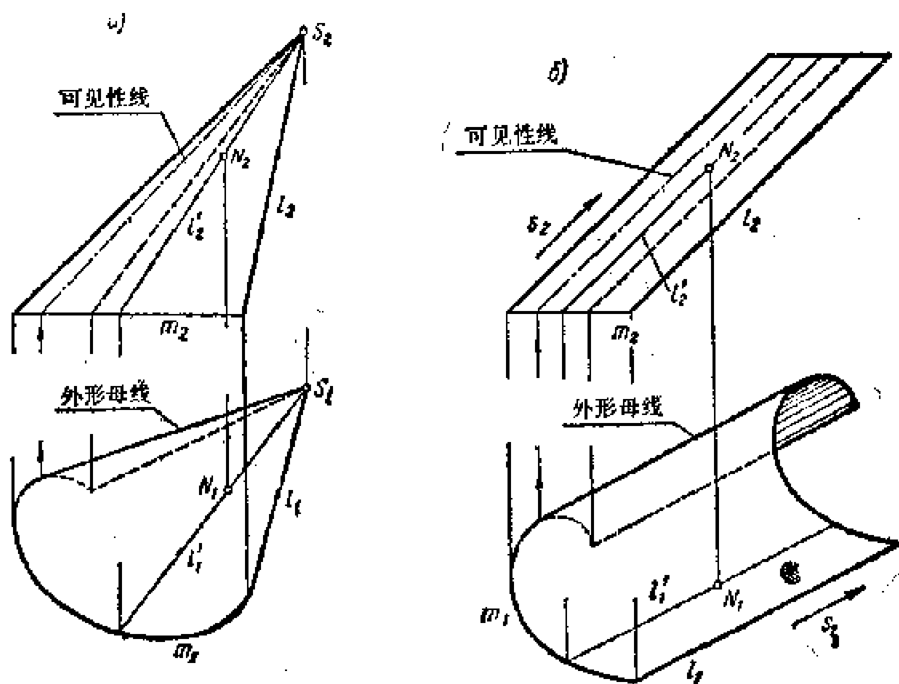


图 270

① 参看第三章 § 1。

锥面的确定要素由顶点和曲导线组成：$\Theta(S, m)$，而柱面的确定要素由曲导线和母线组成：$\Sigma(l, m)$或$\Sigma(S^{\infty}, m)$①。

这些曲面的骨架可以由一组直母线组成。

曲面上的点(例如，点N)可利用通过该点的母线作出。

如果柱面或锥面的导线是二次曲线，即椭圆(圆周)、双曲线或抛物线，则形成二次柱面或二次锥面②。

3. 回折棱面(盘旋面) 如果直母线l作连续运动，并且在运动中的每一个位置都与称为回折棱的某一空间曲线v相切，则这样形成的曲面称为回折棱面(盘旋面)(图 271)。

回折棱是盘旋面的导线，想给出该曲面，只要给出回折棱就可以了。盘旋面的确定要素是：$\Omega(v)$。

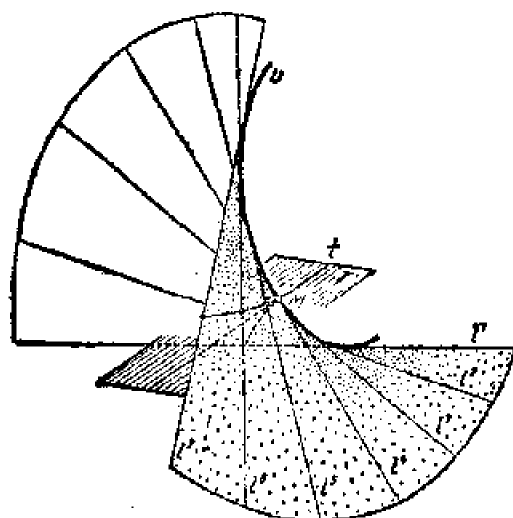


图 271

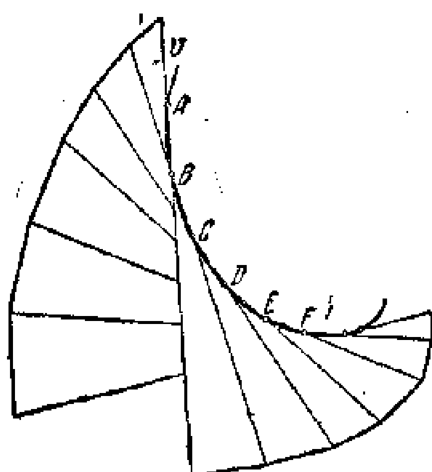


图 272

盘旋面可以看作是多棱面的极限情况(图 272)，该多棱面的棱边是内接于曲线v的空间多角形$ABCDEF$……的各边的延长线。当多角形的边数无限增加而趋于极限时，就得到回折棱v(参看图 271)和盘旋面。

如果盘旋面的导线是平面曲线(图 273)，则切线面就变为平面，并且可以发现，所有切线仅遮盖平面的一部分，即曲线凸起的那一边。

但如果回折棱是空间曲线v，则正的和负的半切线形成以曲线v为分界且互不遮盖的两叶(参看图 271)。

为了在图上给出盘旋面，只要给出它的确定要素，即回折棱的投影就可以了。

设盘旋面在图上用回折棱$v(v_1, v_2)$的两个投影给出(图 274)。

为了作出曲面上点$M(M_2)$的第二个投影M_1，应过点M_2引盘旋面的母线的正面投影，然后找出它的水平投影。但是，如图所见，过点M_2可以引盘旋面的一对母线l_2^1和l_2^2与回折棱切于

① 柱面的无穷远顶点S^{∞}作为直母线l的非固有点给出。

② 参看本章§5。

点 L_2^1 和 L_2^2，因此，位在曲面的不同叶上的两个竞争点投射为点 M_2。

这两个点的水平投影（M_1^1 和 M_1^2）在过点 L_1^1 和 L_1^2 所引的曲线 v_1 的切线上找到。

当回折棱退化为一点（有限远点或无穷远点）时，盘旋面变为锥面或柱面。

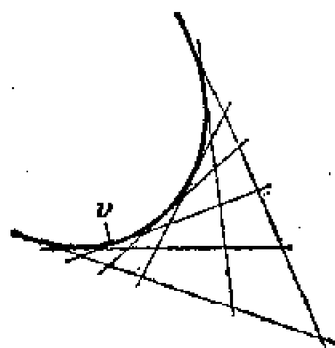


图 273

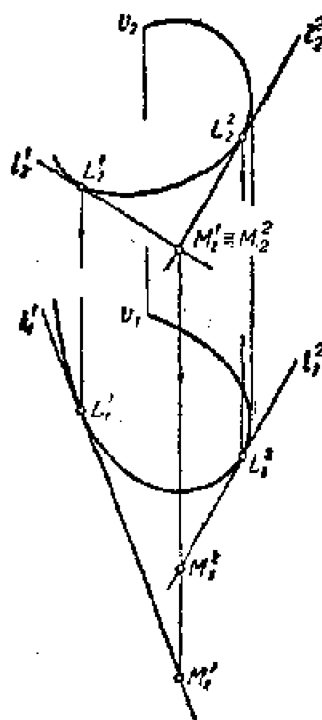


图 274

三种类型的直纹面：锥面、柱面和盘旋面都属于可展直纹面（参看第十一章§2）。其余所有的直纹面称为不可展直纹面或挠面。

4. 试研究关于直纹面的导线数量问题。

直纹面可以看作是直线沿曲导线运动而成。因此，直纹面上任意一点至少有一条直母线通过。

这就发生一个问题，为了唯一地确定母线的运动，需要给出多少条导线？

直线沿一条导线运动的问题可以不讨论，因为十分明显，一条导线是不足以确定运动规律的。我们来研究沿两条导线的运动。

在这种情况下，通过取自直纹面的导线 a 上的任意点 A（图 275）可以有无数的与导线 b 相交的直母线 q，因此，这些母线属于具有顶点 A 和导线 b 的锥面。

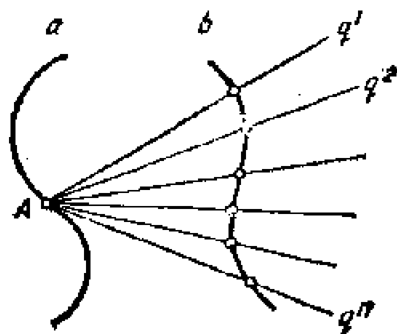


图 275

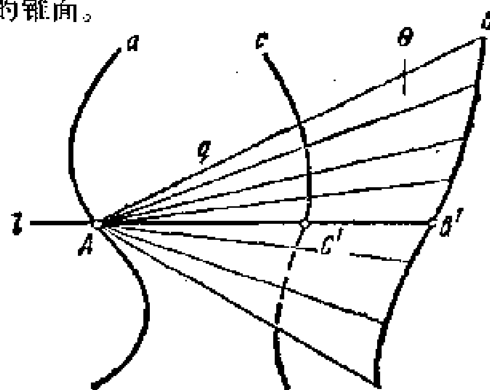


图 276

通过点 A 不可能作一条确定的母线，证明这种方法不能充分地给定直纹面本身，可见在图上用它的两条导线给出曲面也是不充分的。总之，两条导线还不够。

试给出直纹面的**三条**导线 a、b、c(图 276)。在这情况下，为了作出通过点 A 的母线，可进行如下：找出按上面方法作出的锥面 $\Theta(A, b)$ 与导线 c 的交点 C^1。直线 AC^1 属于锥面Θ，因此它不仅与导线 a 和 c 相交，而且也与 b 相交于点 B^1。

为了在复合图上作母线 l(图 277)，应过 c 作正面投射柱面$P(P_2)$，求出曲面 P与曲面 Θ 的交线$m(m_1)$和点 $C_1^1=c_1\times m_1$，然后再找出 $C_2^1=C_1^1C_2^1\times c_2$，最后找出直纹面的母线 $l(AC^1B^1)$ 的投影 l_1 和 l_2。

应该指出，作曲线与曲面的交点的方法，其根据是作出曲面上某一条线$m(m_2)$的第二个投影 $m_1$①。这个问题的解法和直线与平面相交的第一个定位问题的解法类似。

因而，对于取自直纹面上的每一点 A，必有一条用上述方法作出的母线 $l(AC^1B^1)$ 与之对应，也就是说，直纹面上母线运动的特征由三条导线确定。曲面的确定要素是：$\Gamma(a, b, c)$。

在图上曲面的给定便由这三条导线的投影确定(参看图 277)。

如果给出**四条**任意导线 a、b、c 和 d，显然我们就得不到直纹面上很多的母线。导线 d 将只与曲面 $\Gamma(a, b, c)$上通过曲面与曲线 d 的交点的那些母线相交。

因此，**四条**导线是有多余的，如果导线 d 不是曲面$\Gamma(a, b, c)$上的线，这四条导线就不能给定一个直纹面。

应该指出，为了给定**任何**直纹面，必须象上面研究过的情况中给出**三条**导线那样，给出三个参数。

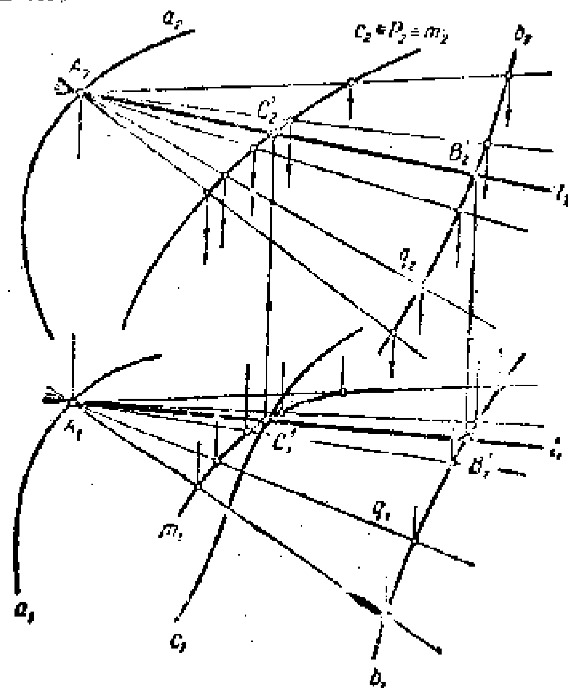


图 277

问题在于，为了确定通过曲面上已知点M的直母线的方向，还要另外给出**两个**参数。这两个参数或是由给出另外两条曲导线（在第三条导线上取了一点M)来保证，或是由给出锥顶(对锥面是固有点，对柱面是无穷远点)或盘旋面的回折棱来保证。

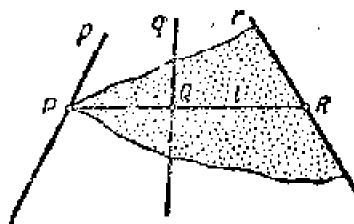


图 278

① 关于解曲面上定位问题的更详细的知识可参看第九、十章。

这样一来，在确定已知点处的母线方向时，锥顶或盘旋面的回折棱就给出了曲面所需的两个参数，从而保证了曲面本身的确定和在图上的给定。

例 选取三条不平行于同一平面的交叉直线 p、q、r 作为直纹面的导线(图 278)。

曲面母线 l 通过导线 p 上的点 P，同时与直线 q 和 r 相交，当点 P 沿直线 p 移动时，母线 l 就描绘出直纹(单叶)双曲面。

在这种情况下，母线的作图就简化了，因为这时由点 P 和直线 r 所确定的平面代替了辅助锥面。这个平面与导线 q 交于点 Q 而确定双曲面的母线 $PQR\equiv l$。

在本章的§4中已经指出，直纹旋转双曲面可由直线旋转而成，它包含有两族直母线。因此十分明显，可以把双曲面上始终与另一族的所有母线相交的旋转着的母线a的运动(参看图262)，看作是该母线沿第二族中任意选定的三条母线(更确切地说是导线)p、q、r 的滑动。

这样一来，**直纹旋转双曲面**就可以按照与本例研究的**直纹双曲面**同样的形成规律而形成(参看图 278)。因此，这里谈的是同一个曲面。

然而母线 l 沿不平行于同一平面的三条直导线 p、q、r 的运动(图 278)不仅可以形成旋转双曲面，而且也可以形成垂直于轴线的截面为椭圆的一般形式的双曲面①(图 279)。

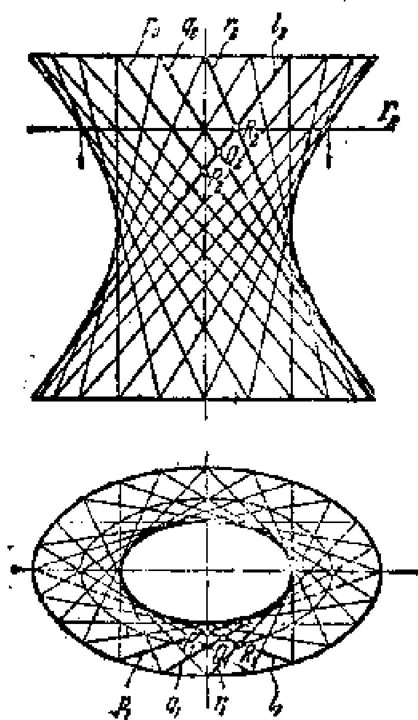


图 279

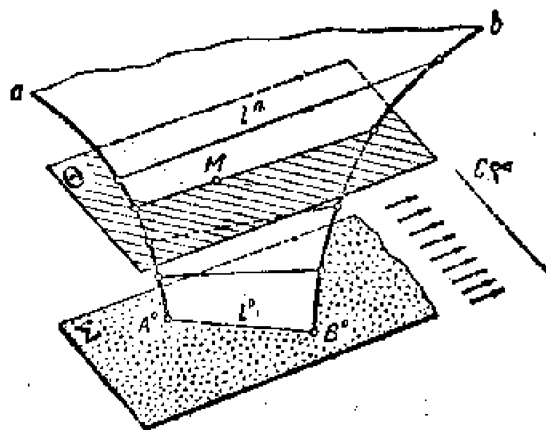


图 280

§7. 具有平行导面的直纹面

1. 所有母线都平行于定平面Σ的拗面，就是属于这种类型的直纹面，定平面Σ称为平行导面(或导面)。

① 参看本章§5。

给出平行导面 Σ就代替了曲面所必需的三条导线中的一条。

实际上，如果直纹面上所有的母线都平行于某平面Σ，那么每条母线就平行于该平面上的一直线。因为平行的直线相交于无穷远点，所以每条母线与平面 Σ交于无穷远点①。换句话说，直纹面的每条母线与平面Σ上的无穷远直线 c^{∞}相交。这条直线可以看作是直纹面的一条导线（图280）。

因此，为了给出具有平行导面的直纹面，必须给出一对导线和一个平行导面。曲面的确定要素是：$\Omega(a, b, \Sigma)$。

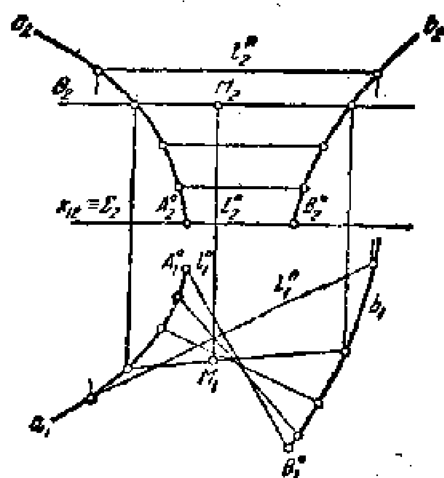
2. 现在来研究具有平行导面的直纹面的各种形式。

1) **柱状面** 具有一个平行导面和两条曲导线的直纹面称为柱状面。

因此，柱状面的所有母线都平行于导面Σ，作图时可在图上引若干平行于平面 Σ的平面 Θ，然后求出这些平面与给出的柱状面的曲导线 a 和 b 的交点(参看图 280)。

在复合图上绘制柱状面时，取一个投影面作为导面是最方便的。例如，如果平面Π_1是导面，则柱状面的所有母线都是水平线，因此它们的投影很容易作出。

图 281 画出一个具有导面 $\Pi_1\equiv\Sigma$ 及曲导线 a 和 b 的柱状面 $E: E(a, b, \Pi_1)$。柱状面的母线 l 的正面投影平行于线Σ_2。它的水平投影可根据母线在任何位置都与曲线 a 和 b 相交这个条件作出。


图 281

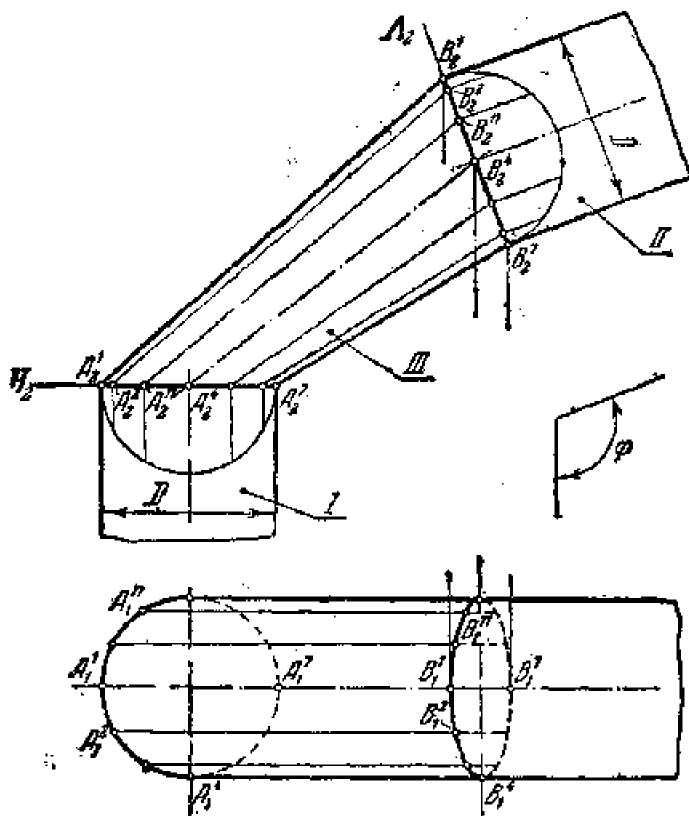


图 282

① 关于空间的"非固有"或"无穷远"元素参看第一章 § 1。

图 282 画出一个连接两条直径都等于D的输送管I和II的接头，这两条输送管的轴线相交成角φ。输送管的连接部分III具有柱状面的形状，其导线为位在平面H和Λ上、直径为D的圆周，而平行导面为Π_2。

柱状面III可以设想由直母线AB运动而成，母线上的点A和B等速地并以同样的角速度沿着两圆周导线移动。

在图上作柱状面的母线，可以先将两圆周导线各分为 12 等分，然后依次连接它们的对应点(A^1B^1, B^2B^2……A^7B^7……)。

2) 锥状面 具有一个平行导面、一条曲导线和一条直导线的直纹面称为锥状面。

锥状面可以看作是柱状面的特殊情况。

图 283 表示锥状面 P 的作法，这个曲面具有平行导面 Π_1 并以曲线 $m(m_1, m_2)$ 和直线 $c(c_1, c_2)$作为导线：$P(m, c, \Pi_1)$。

如果锥状面的直导线 n 垂直于导面 Σ，则称为正锥状面。

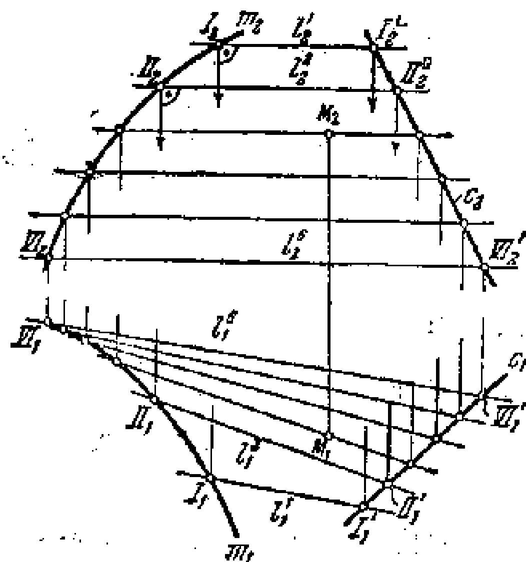


图 283

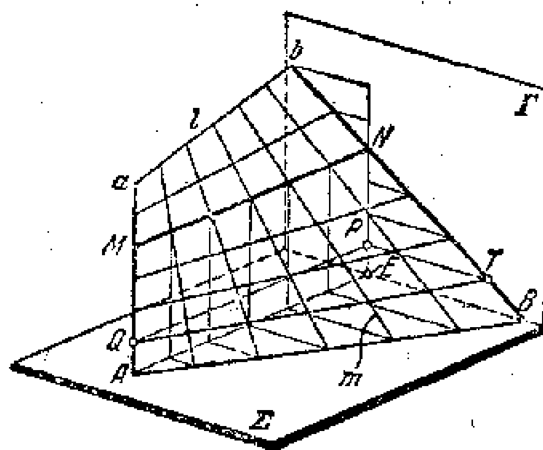


图 284

3) 双曲抛物面（"扭平面"） 在本章§5 里已经指出，双曲抛物面是直纹面。

这种曲面是具有三条直导线的锥状面，其中一条为无穷远直线。因此可以说，直纹抛物面是由一直母线沿两条直导线并平行于平行导面运动而形成的曲面。

设a和b是直纹抛物面的直导线，而Σ是它的平行导面(图 284)。假定，直线$a \perp \Sigma$并与它交于点A，而直线b与它交于点B。过直线b作平面$\Gamma \perp \Sigma$。显然，直线AB就是直纹抛物面的一条母线。

另一条母线是直线MN，这就是直线a和b的公垂线，这条公垂线是不难作出的，只要引$AE \perp \Gamma$和$EN \parallel a$直到与直线b相交于点N，然后作$MN \parallel AE$即得。

其余的母线也应当平行于Σ，而且可以利用引辅助水平截面的方法作出，例如，引$QP \parallel AE$和$TP \parallel BE$，就作出曲面的母线QT。

平面$\Gamma\perp\Sigma$将是曲面的第二个平行导面，并且第二族的所有母线，包括 a 和 b 在内，将平行于平面Γ。在图 284 上，这些母线是用引平行于平面Γ的辅助截平面的方法作出的。

如果$\Gamma\perp\Sigma$(参看图 284)，则直纹抛物面称为正直纹抛物面，否则就称为斜直纹抛物面。

在工程上，直纹抛物面时常称为"拗平面"，因为在特殊情况下，当所取的两条直导线不是交叉的、而是位在同一平面上，母线运动时就描绘出一个平面，即该两条导线所在的平面。

另一方面，包括直纹抛物面在内的不可展曲面称为"拗面"。

图 285 表示斜直纹抛物面 $\Omega(a, b, \Pi_1)$ 在复合图上的作法。取直线 a 和 b 及平面Π_1 作为导线和导面。

如果注意到直线 a 和 b 属于第一族的母线，而水平线 l 属于第二族的母线，则它们的作法就很清楚，无需补充说明。

在水平投影上得到直纹抛物面的呈抛物线形状的外形线，这条抛物线是直母线族的包络线。

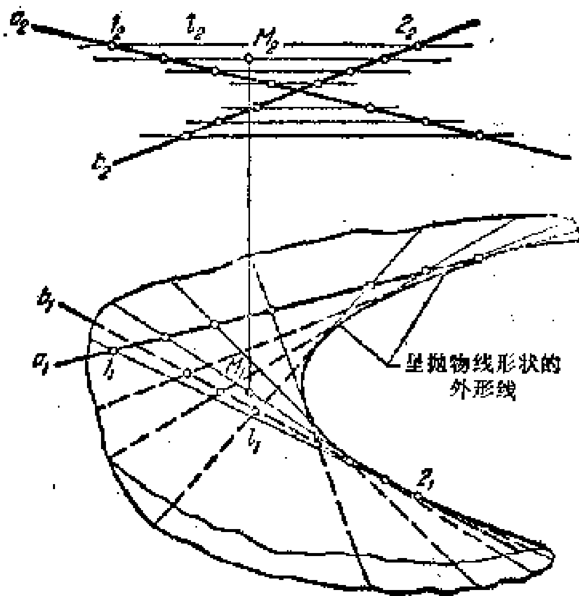


图 285

§8. 螺 旋 面

1. 定义 任意的线(母线)作螺旋运动①时所描绘出的曲面称为螺旋面。

如果在螺旋面上任意选定的一条曲线与曲面上所有称为螺旋平行线的螺旋导线相交，则螺旋面也可由该曲线的运动而形成。

这样，在螺旋面上有两个线族：曲母线族和螺旋平行线族。这些线便组成曲面的骨架。

螺旋面被通过其轴 i 的平面所截得的截线(这些截线都是全等的)称为子午线，而被垂直于轴 i 的平面所截得的截线(它们也是全等的)称为法截线。

螺旋面的所有螺旋平行线具有同样的导程 h②(h 称为螺旋面的导程)和参数

$$p=\frac{h}{2\pi}。$$

要在图上给定螺旋面，必须给出轴 i 和母线 l 的投影，同时说明导程 h 或参数 p 的数值。

螺旋面的确定要素是：$\Phi(i, l, h)$或$\Phi(i, l, p)$。

不过，曲面的确定要素也可用另一种方式给出。可以给出其中一条螺旋平行线代替导程 h(或参数 p)，例如给出曲线 v，这时，曲线 v 就作为螺旋面的基线。于是曲面的确定要素就是：

---

① 螺旋运动的特征是绕着确定的轴 i 旋转同时平行于轴 i 平行移动。

② 参看第六章§6。

$\Phi(i, l, v)$。

2. 由直母线作螺旋运动而形成的直纹螺旋面或螺旋面在工程上具有重大的意义和广泛的应用。

根据母线 l 与轴 i 相交或不相交而称曲面为闭合螺旋面或开放螺旋面。根据母线 l 与轴 i 垂直或倾斜又称曲面为正螺旋面或斜螺旋面。

现在来研究各种类型的直纹螺旋面。

3. 正螺旋面由直母线 l 运动而成，母线与螺旋面的不动的轴 i 相交成直角而绕该轴旋转，同时沿着轴的方向移动，移动的距离与旋转的角度成正比。

这种曲面属于闭合螺旋面。

曲面的每一条直母线 l 与轴 i 交于点 I 而被该点分为两射线，每条射线形成曲面的一叶。这两叶曲面沿线 i 分界(图 286)。

于是，正螺旋面的母线 l 沿着圆柱的轴 i 和螺旋线 b 这两条导线运动，并且始终平行于某个平行导面 $\Sigma \perp i$，通常取这个平面作为平面 Π_1。曲面的确定要素是：$P(i, l, h)$ 或 $P(i, l, b)$。

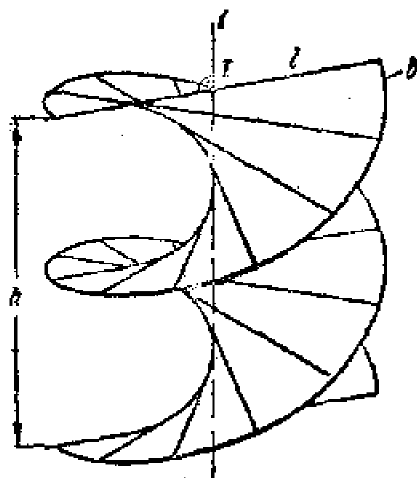


图 286

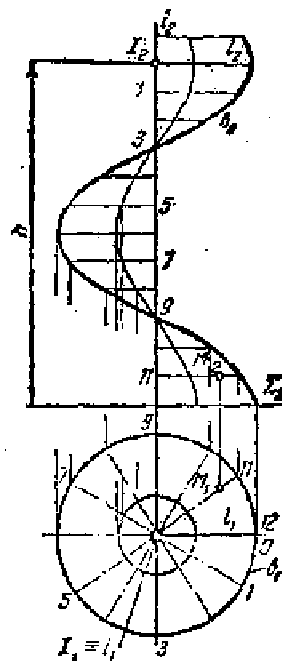


图 287

根据形成的方法，刚才研究的曲面属于锥状面，并可称为螺旋锥状面(参看本章 § 7)。

图 287 画出以螺旋面的两条导线(轴 i 和螺旋线 b)为界限的曲面的一叶。

4. 斜螺旋面或阿基米德螺旋面与正螺旋面不同的是，它的直母线与螺旋面的轴 i 相交的角度 β 不等于 $90°$ $(\beta \neq 90°)$。

螺旋面的母线在运动时与两条导线(圆柱的轴 i 和圆柱面上的螺旋线 b)相交，并且始终平行于具有顶点 S 的某旋转锥面的母线，该锥面与螺旋线有公共的轴线，并且它的母线与轴线的夹角等于 β(图 288)。这个锥面称为斜螺旋面的导锥面，它确定了第三个导向条件(补充上述的两条导

线)，当螺旋面的母线运动时，必须服从这个条件。

曲面的确定要素是：$\Theta(i, l, h)$或$\Theta(i, l, b)$。

在复合图上作螺旋面时，首先作出螺旋导线，把它的水平投影(圆周)分为12等分，然后把分点(I、II、III……)投到正面投影上。

作出带有顶点S和角β的螺旋面的导锥面后，引导锥面的一系列母线，然后通过螺旋线的点I_2、II_2、III_2……引螺旋面的母线，使平行于导锥面上对应的母线。一条接一条的母线依次沿轴i平行移动数值$\frac{h}{12}$(这里，h是螺旋面的导程)，并绕同一轴线转过角度$\frac{2\pi}{12}$。

螺旋面在正面投影上的外形线是直母线族的包络线。

螺旋面被垂直于其轴线的平面$\Gamma(\Gamma_2)$所截得的截线(法截线)是**阿基米德螺线**①(参看图288)。

要作这条曲截线(阿基米德螺线)，只要标出螺旋面的母线II和VI，并过它们的端点A和VI作截平面Γ，然后将线段i_1VI_1分为4等分(根据角$II_1i_1VI_1$的等分数)，再在半径i_1III_1上截取线段$i_1B_1=\frac{i_1VI_1}{4}$，在半径i_1IV_1上截取线段$i_1C_1=2i_1B_1$等等。

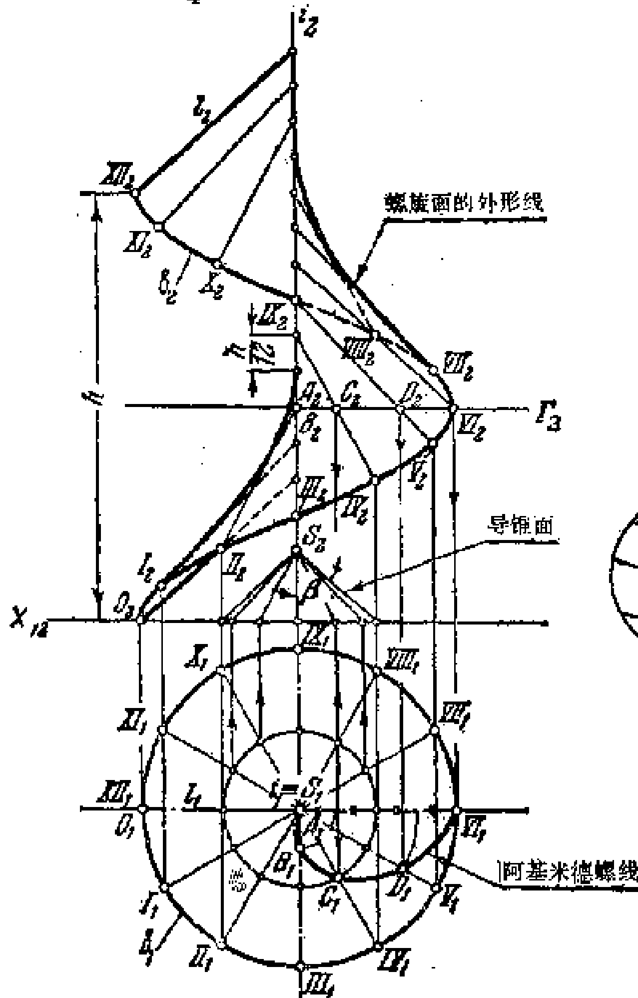


图 288

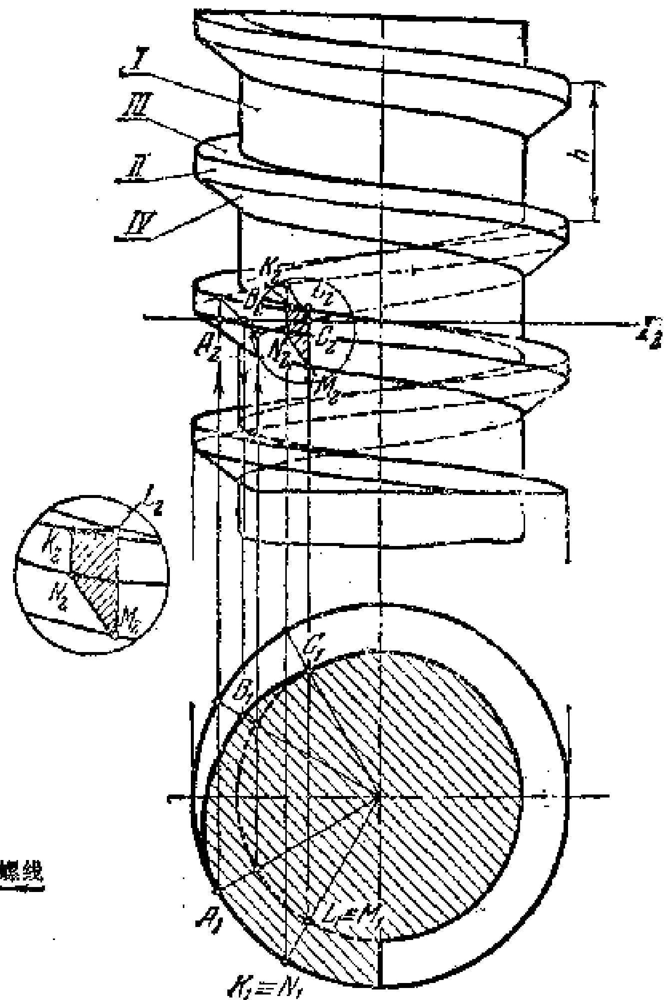


图 289

① 证明参看H. Φ. 切特维鲁新著《画法几何教程》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1956年版。

5. 螺旋面，特别是正的和斜的螺旋面，在工程上获得广泛的应用。蜗杆（在蜗轮传动中）、螺旋（在螺旋运输机等方面）、螺栓和其它螺纹制品都是由这些曲面围成的。

由圆柱面和螺旋面围成的物体称为螺杆。根据螺旋线的方向，螺杆可能具有右螺纹或左螺纹[①]。

图 289 表示具有左旋梯形螺纹（螺旋线）的螺杆。它由圆柱面 I 和 II、正螺旋面 III 和斜螺旋面 IV 围成，也可以由梯形 $KLMN$ 作螺旋运动而成。这时，梯形各顶点沿着导程为 h 的对应螺旋线滑动。

梯形母线绕着基圆柱的轴线每旋转一周便升高等于螺旋线的导程 h 的距离。因为螺杆由一个牙型剖面运动而得，所以它称为单线的[②]。

要在复合图上画螺杆，必须作出梯形母线各顶点 K、L、M、N 所描绘出的螺旋线的投影。斜螺旋面 IV 在正面投影上的外形线是利用对两条螺旋导线的投影作切线得到的。外形线的这种作法是近似的，因为实际上斜螺旋面的外形线是曲线（参看图 288）。

螺杆被水平面 $\Gamma(\Gamma_2)$ 所截得的横截面图形（图 289）由两个圆弧（两个圆柱面的截线）、一直线段（正螺旋面的截线）和阿基米德螺线的一段弧（斜螺旋面的截线）围成。

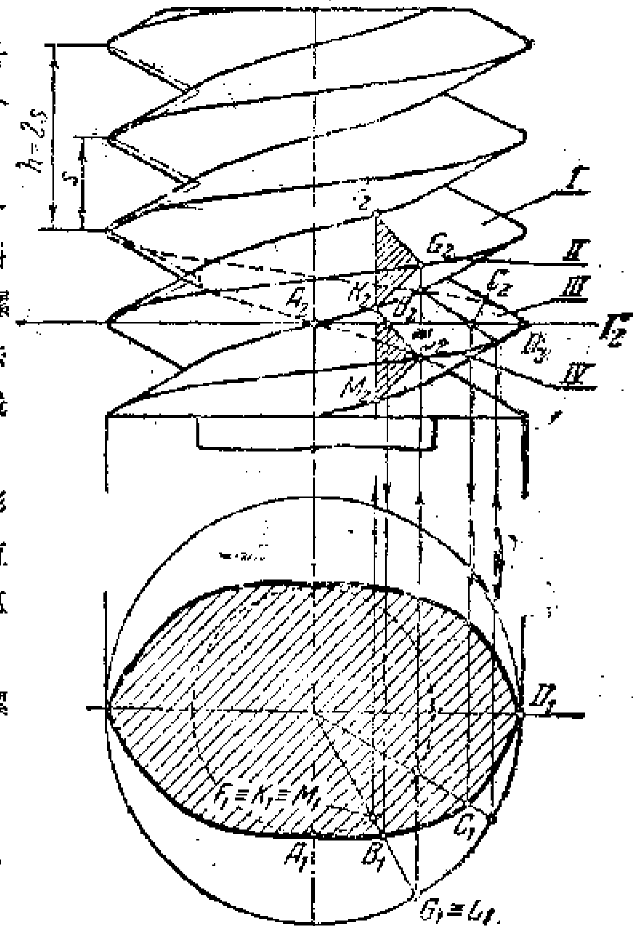


图 290

图 290 上表示具有右旋三角形螺纹的双线螺杆，它由 4 个斜螺旋面（I、II、III、IV）围成。

这种螺杆可以看作是由两个三角形剖面 FGK 和 KLM 沿螺旋导线运动而成（参看图290），并且当旋转一周时，每个剖面上升高度 $h=2s$。

用水平面 $\Gamma(\Gamma_2)$ 截螺杆，我们就得到由阿基米德螺线围成的截线图形。

6. 渐伸螺旋面（盘旋面）由直母线 l 运动而成，母线在其所有的位置上始终切于一条圆柱螺旋线，这条螺旋线就是螺旋面的回折棱（图 291）。

渐伸螺旋面也称为可展螺旋面，因为它象每一个具有回折棱的直纹面一样是可展曲面（参看本章 § 6 之 3）。这种曲面属于开放螺旋面。要给出这种曲面，也象给出任何的盘旋面一样，只要给出回折棱就行。因此，曲面的确定要素是：$\Omega(m)$。

然而渐伸螺旋面也可以象给出螺旋面的一般方法那样给出：$\Omega(i, l, h)$。

---

① 参看第六章 § 6。

② 单线螺杆（однозаходные винты）也称为单头的（одноходовые）或单旋的（однооборотные）。

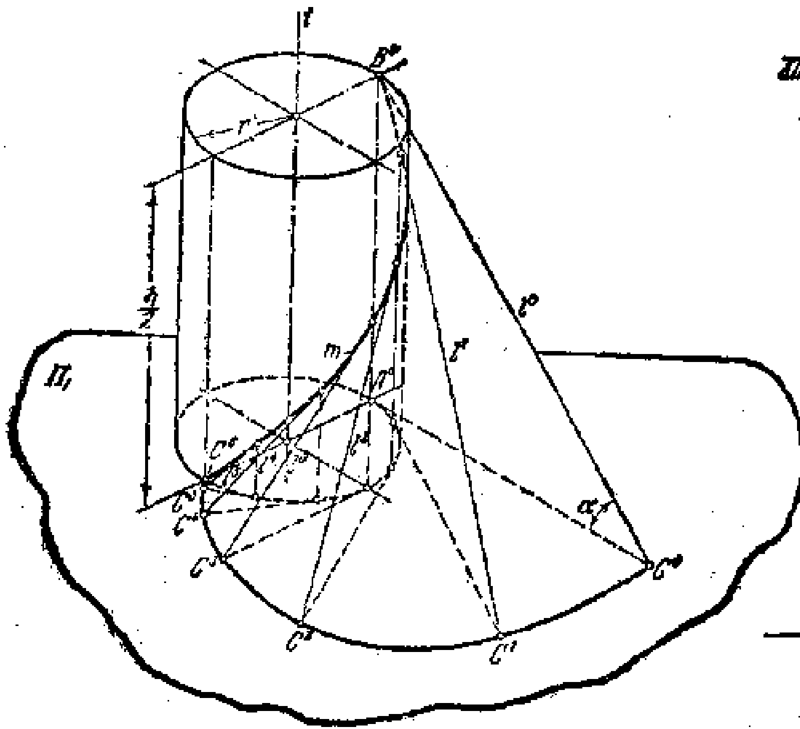


图 291

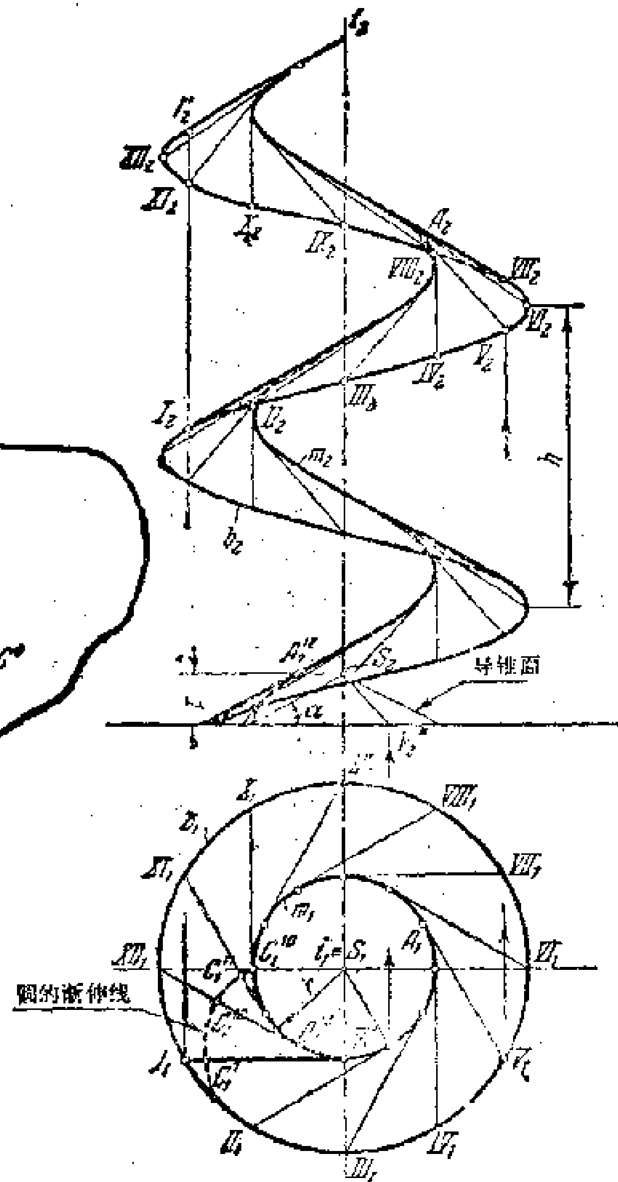


图 292

螺旋面的直母线到螺旋面的轴线的距离等于基圆柱的半径 r：

$$r=\frac{h}{2\pi\operatorname{tg}\alpha}=\frac{p}{\operatorname{tg}\alpha},$$

式中 h 是螺旋线的导程；

p 是螺旋线的参数；

α 是螺旋线的升角和母线对水平面的倾角。

该曲面的导锥面与其回折棱的导锥面重合。如果取导锥面的底圆半径等于 r（图 292），则它的高度将等于回折棱和螺旋面的参数 p。

该曲面的直母线沿着两条螺旋线滑动，并且始终与导锥面的母线平行。在图上，曲面的作法归结为作这两条螺旋线的投影，这两条螺旋线由母线线段的端点 F 和切点 A 形成。切点 A 沿着回折棱移动。

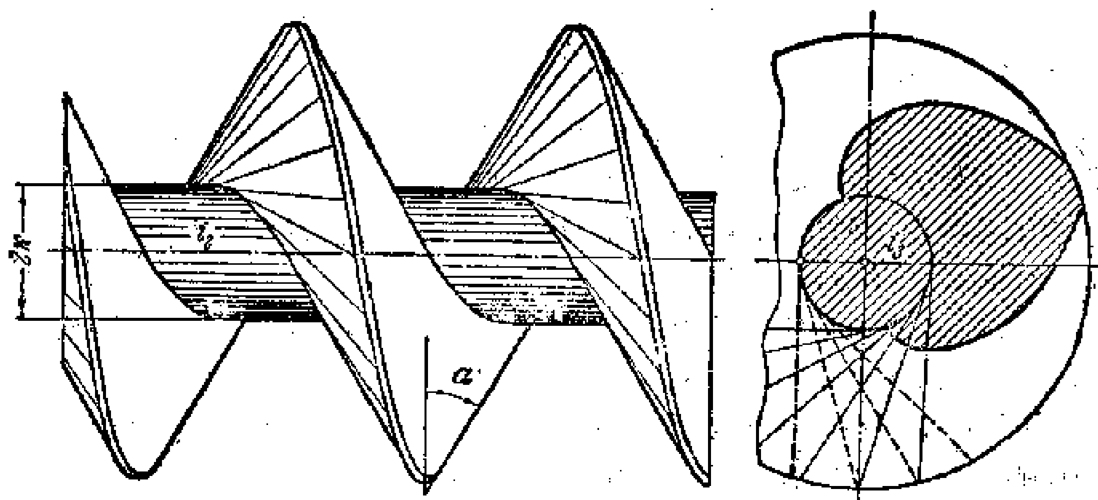


图 293

螺旋面的法截线是圆周的渐伸线[①]。

图 293 画出一个单线螺杆，其工作面是渐伸螺旋面。

螺杆端截面的图形由圆弧和渐伸线围成。

类似的螺杆应用于蜗轮传动。

7．当直母线 l 沿着圆柱面上的螺旋线滑动并始终与圆柱面相切时，母线的运动就形成包旋螺旋面。母线对水平面的倾角 δ 不等于螺旋线的升角 α $\left(\alpha=\text{arctg}\frac{p}{r}\right)$。

这种曲面属于开放螺旋面[②]。

曲面的确定要素是：$E(i, l, h)$。

根据 $\delta \gtrless \alpha$，该曲面的法截线将是加长的或缩短的圆周渐伸线，而圆周的半径不等于基圆柱的半径 r。

试谈一下包旋螺旋面当 $\delta=0$ 时的一种特殊情况。

这时，螺旋面的母线平行于水平面，并且垂直于螺旋面的轴线（图 294）。

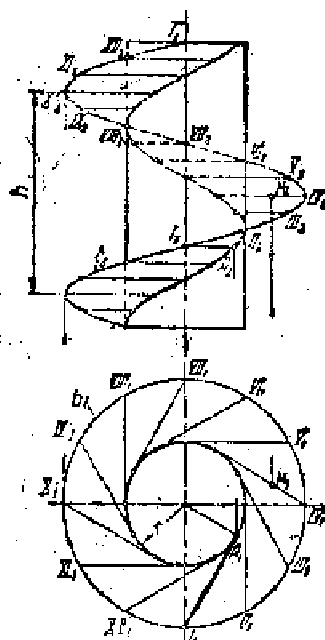


图 294

这种曲面属于柱状面的一种，并可由始终平行于水平面的直母线沿同一导程的两条螺旋导线滑动而形成。这种类型的螺旋面称为螺旋柱状面。

在复合图上，这种曲面的作法归结为作出由母线线段的切点 A 和端点 I 所形成的螺旋线的投影（参看图 294）。

在各种类型的蜗轮传动中，也有用包旋螺旋面的蜗轮传动。在这种传动中，蜗杆的工作面是具有角 $\delta \neq 0$ 的包旋螺旋面。

① 证明参看 П. Ф. 切特维鲁新等《画法几何教程》，莫斯科，国家技术理论书籍出版社，1956 年版。

② 与渐伸螺旋面不同，包旋螺旋面是不可展直纹面（扭面）（参看第十一章 § 2）。

§9. 循环曲面简介

1. 定义。由定半径或变半径的圆周(母线)任意运动而形成的曲面称为循环曲面。由定义可知,每一个循环曲面都有一个组成其骨架的同样半径或不同半径的圆周母线族。第二个导线族在不同情况下可以根据给定的母线的运动规律由不同的曲线组成。

要给定循环曲面,必须给出母线的运动规律及其半径的变化规律。这两个规律既可用解析法表达,也可用图示法表达。

上面研究过的某些曲面都属于循环曲面。这就是:第一,具有圆周母线(纬圆)族的旋转曲面;第二,二次曲面中那些具有圆截线的曲面。

2. 变半径和定半径的管状面是循环曲面的一种特殊形式。前者由变半径的圆周m运动而成,运动时圆心O沿着给定的曲线l移动,而圆周所在的平面始终垂直于该曲线(参看图 295, a)。

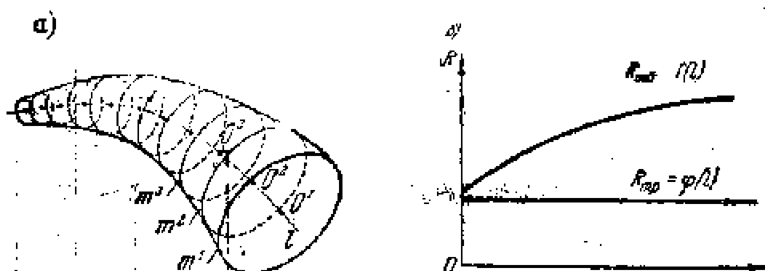


图 295

这个圆周的顺序位置组成曲面的骨架。轴线l是导线,圆心即沿着l运动。

如果轴线是直线,则得到旋转曲面(参看本章§3)。

要给出变半径的管状面,必须给出轴线l和圆周母线m的半径R的变化规律。例如,这个规律可以用随着弧l的长度而变化的R的曲线给出:$R_{管}=f(l)$(图 295, $б$)。变半径管状面的确定要素是:

$$\Phi[l, R_{管}=f(l)]。$$

3. 如果管状面的圆周母线的半径是不变的,则曲面简称为管面(图296):$\theta(l, m)$。曲线$R_{管}=\varphi(l)$是水平直线(参看图 295, $б$)。

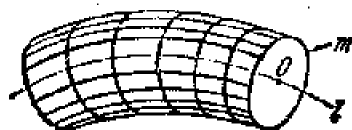


图 296

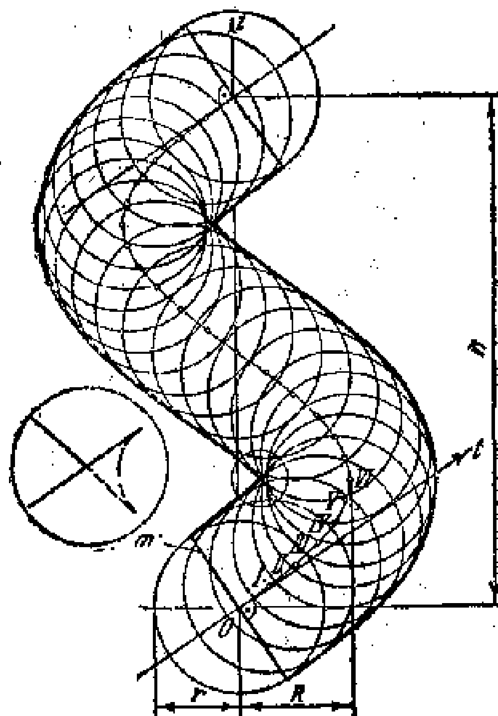


图 297

具有直线轴的管面是**旋转柱面**。

具有定直径 $d=2r$ 的球面作螺旋运动就形成管螺旋面，这时，球心沿着半径为 R 和导程为 h 的圆柱螺旋线滑动。

该曲面是**球面族的包络面**，并且是在 $r<R$ 的条件下形成的(图 297)，如果 $r\geqslant R$，那么就形成螺旋杆。

两个无限接近的球面的交线(圆周) m (特征线)所在的平面垂直于螺旋线上点 O 处的切线 t，同时垂直于图面。管螺旋面也可由这个圆周运动而形成。

给出这种曲面和给出管状面 Θ 是一样的。但它也可以象具有轴 i、圆周母线 m 和导程 h 的螺旋面 $\Sigma(i, m, h)$ 那样给出。

管状面投射到平行于螺旋线的轴的平面上时(参看图297)，其外形线包络着以螺旋线上的点 I、II、III……为中心、以 r 为半径所作的所有内切球面的投影。这条外形线由两条曲线形成，这些曲线每旋转一周就形成两个顶点(回折点)。

将圆截面的钢丝绕在圆柱形心棒上造成的圆柱弹簧，是由管螺旋面围成的。图 298 给出了弹簧的规定画法。

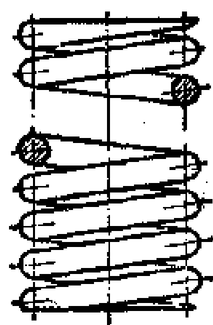


图 298

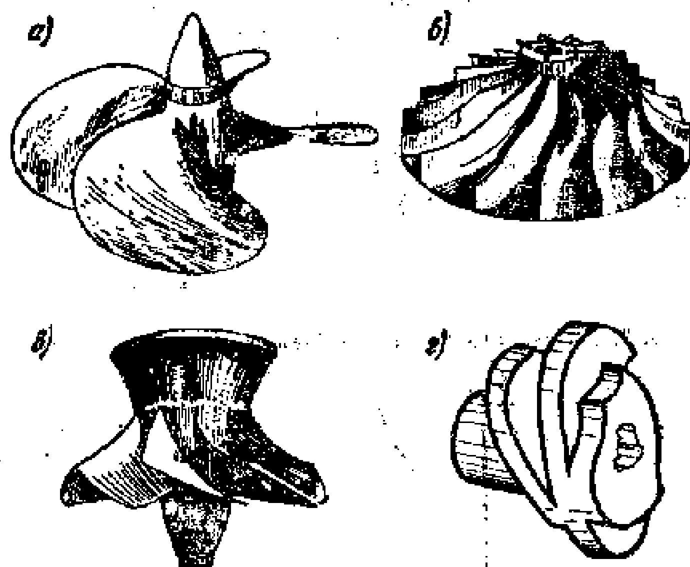


图 299

在工程技术的实践中，经常要绘制和阅读一些机器和机构的零件图，组成这些零件的曲面有时具有非常复杂的外形。图 299 画出了一些具有复杂曲面的零件：a——船用螺旋桨；$б$——叶轮；$в$——水轮机的轮子；$г$——凸轮[①]。类似零件的技术图样应同时给出有关曲面的图，以满足对这些曲面的**可逆图**所提出的要求。

绘制技术图样的方法、对这些图样的要求以及这时所应用的一些规定都在机械制图教程里

① 图 299 所示的零件选自 H. A. 德鲁任斯基《复杂曲面的加工方法》一书，莫斯科，国家机器制造科技书籍出版社，1961 年版。

研究。它们是以画法几何所研究过的曲面的各种形成方法和曲面可逆图的给定法为基础的。

复 习 题

1. 给定曲面的解析法和运动法的区别何在？
2. 什么是曲面的骨架？由骨架给定的曲面的特点是什么？
3. 什么是曲面的确定要素？
4. 为了得到曲面的可逆图，应当给出该曲面的哪些几何元素的投影？
5. 移动曲面是怎样形成的？
6. 旋转球面，锥面和柱面的确定要素是怎样组成的？
7. 旋转曲面是怎样形成的？它们在图上怎样给定？曲面上的什么线称为纬圆和子午线？
8. 什么是旋转曲面的主子午线？
9. 有哪些二次旋转曲面？它们是怎样形成的？怎样在图上给出一般形式的二次曲面？
10. 什么曲面称为直纹面？怎样在图上给出它的图象？
11. 试给出锥面和柱面的定义。
12. 为什么盘旋面的回折棱应当是空间曲线而不是平面曲线？在后一种情况下所形成的是什么曲面？
13. 试述具有平行导面的直纹面的各种形式，并详细说明它们的形成方法。这些曲面的确定要素是什么？
14. 具有两条导线（直线）的锥状面称为什么？这是几次的曲面？
15. 直纹双曲面和直纹抛物面的形成规律有何区别？这两个曲面与所有其它的直纹面有什么区别？
16. 怎样在图上给出一般形式的螺旋面？
17. 试详细说明螺旋面的形成方法及其在工程上的应用。
18. 螺旋面上的两个线族是怎样的？
19. 循环曲面和管状面是怎样形成的？

练 习 题

1. 如果给出旋转曲面的母线 b（空间曲线）和旋转轴 i，试作曲面的主子午线（图 300）。

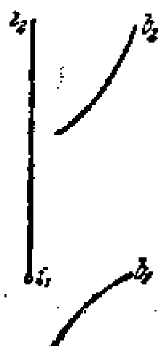


图 300

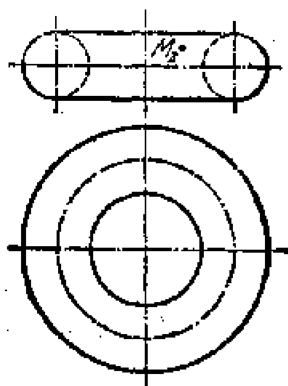


图 301

2. 当立方体绕其对角线 MN 旋转时，立方体的棱边形成什么曲面？如果 MN 垂直于水平投影面，试作出这些曲面的水平投影和正面投影（可用更换投影面法作立方体的投影）。

3. 求作具有铅直轴和直母线的旋转双曲面的投影，母线对 Π_1 倾斜 45°，与轴距离 30 毫米。

4. 求作位在圆环面上点 $M(M_2)$ 的可能的水平投影（图 301）。

5. 求作柱面上的点 A 和 B 所缺的投影。柱面由导线 $m(m_1, m_2)$ 和母线的方向 $s(s_1, s_2)$ 给定（图 302）。

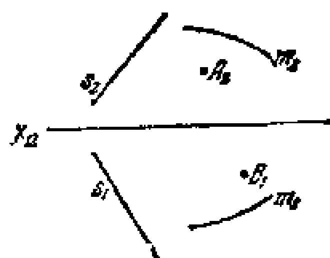


图 302



图 303

6. 求作锥面上的点 A 和 B 所缺的投影。锥面由导线 $m(m_1, m_2)$ 和顶点 $S(S_1, S_2)$ 给定(图 303)。

7*. 试作包旋螺旋面的两个投影，这曲面由对水平面成倾角 $\delta=30°$ 的线段 $AB=30$ 毫米作螺旋运动而成。螺旋面的导线是半径 $r=20$ 毫米和导程 $h=50$ 毫米的螺旋线。(图 304)。

作出包旋螺旋面上的点 $M(M_1)$ 的正面投影。

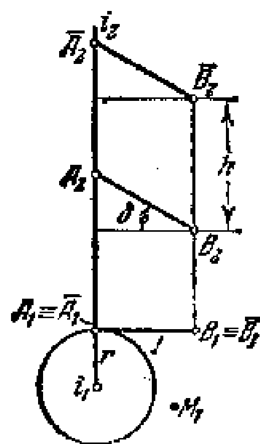


图 304

8*. 试根据下列数据作出螺旋杆(管螺旋面的特殊情况——图 297)的两个投影：$r=25$ 毫米，$R=20$ 毫米，$h=50$ 毫米。

第八章　曲面的切面

§1. 基本概念

1. 在研究曲线时，已经用过平面曲线或空间曲线的切线的概念。现在我们必须引入一个新的概念：**曲面的切线**。

设有某曲面Φ，在曲面上标出一个任意点M，要求过该点引一直线与曲面相切(图305)。

过M引直线s，该直线与曲面还相交于另一点M'。这条直线称为割线。

为了得到曲面的切线，应当象作曲线的切线那样，令点M'趋近于点M直到它们重合。

为了使M'趋近于M的方式完全确定，就要建立点M'趋近于点M时应走的路线，这条路线由曲面上某条光滑曲线l确定。现在，若M'无限趋近于M，在极限时，割线s便占有曲面的切线t的位置。

这样，曲面的切线是一条与曲面交于两个点的直线的极限位置(当这两个交点重合时)。

同时t也是曲线l的切线。因此可以这样说：**与曲面上任意一条曲线相切的直线称为曲面的切线。**因为过曲面Φ上的点M可以任意引许多割线，并可以使点M'沿不同的路线趋近于点M，所以在曲面上已知点M处的切线是无限多的。

2. 在微分几何里证明了在曲面上的一个普通点处的所有切线有一个非常重要的性质，即**这些切线都位在同一个平面上**①。这个平面称为曲面的切面。

因此，切面是过曲面上一点所作的全部切线的轨迹。

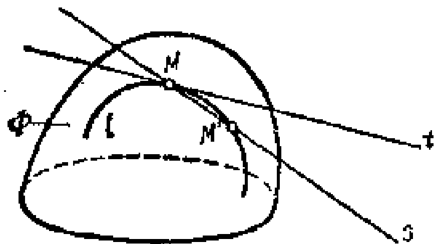


图 305

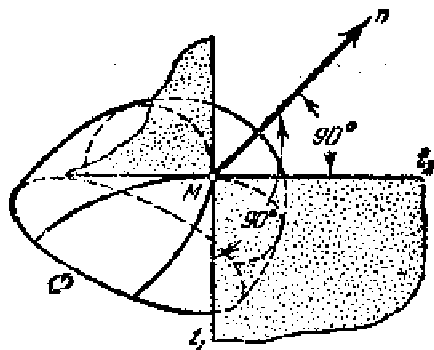


图 306

显然，为了借助直线作曲面上已知点处的切面，只要过该点作曲面的两条切线就够了。这两条切线可以利用通过已知点M的任意两条形状简单的光滑曲线作出(图306)。

在几何学的整个领域里，切面的概念起着极其重要的作用。与利用曲线(平面的或空间的)

① 曲面上不具有这个性质的点是奇异点。

的切线来研究曲线在切点附近的形状相似，切面也可用来研究在切点邻域上曲面的形状。这时会发现，并不是过曲面上所有的点都可以作切面。因此，曲面上的点就被区分为普通点和奇异点。

如果过曲面上的一点只有或只能作一个确定的切面，这样的点称为普通点，而过奇异点所作的切面则不是确定的或者不是唯一的。

在一些大家所熟悉的曲面上，下列一些点可以作为奇异点的例子：

1）一切锥面的顶点，其中也包括圆锥面的顶点；

2）旋转曲面的"顶点"，即在旋转曲面的子午线与曲面的轴线不相交于直角的条件下，子午线与轴线的交点；

3）在可展曲面的回折棱上的任意点。

3．曲面的法线这个概念与切面的概念有着不可分割的联系。

在曲面上某一点M处的法线是这样的一条直线，它通过点M并垂直于该点的切面。图306上以矢量n来表示曲面Φ在点M处的法线。因为法线n垂直于由直线t_1和t_2确定的切面，当然也垂直于这两条直线。

4．现在来讨论曲面及其切面的相对位置。这里可能有各种不同情况：

1）切面可能与曲面有唯一的一个公共点——切点；

2）切面可能与曲面相交于某一条线，其中包括相交于一条直线；

3）切面可能与曲面沿某一曲线相切，特别要注意的是沿一条直线相切。

试研究几个例子。

例1 在下列各点处作圆环面的切面（图307）：点$A(A_1, A_2)$——平面$\Theta(\Theta_1, \Theta_2)$；点$B(B_1, B_2)$——平面$\Phi(\Phi_1)$；点$C(C_1, C_2)$——平面$\Sigma(\Sigma_2)$。并且$A(A_1, A_2)$在圆环面的赤道圆上，$B(B_1, B_2)$在喉圆上，而$C(C_1, C_2)$在称为中间圆的圆周上。

这里，切面与曲面的相对位置有不同的情况。

切面$\Theta(\Theta_1, \Theta_2)$由直线$t(t_1, t_2)$和$t^{I}(t_1^{I}, t_2^{I})$确定，它与曲面不相交而仅与曲面有一个公切点。平面$\Phi(\Phi_1)$由直线$t^{II}(t_1^{II}, t_2^{II})$和$t^{III}(t_1^{III}, t_2^{III})$确定，而且与曲面相交于一条曲线，切点$B(B_1, B_2)$就是曲线上的一个点。最后，平面$\Sigma(\Sigma_2)$由直线$t^{IV}(t_1^{IV}, t_2^{IV})$和$t^{V}(t_1^{V}, t_2^{V})$确定，它不仅与曲面切于一点$C$，而且沿着整个中间圆相切。

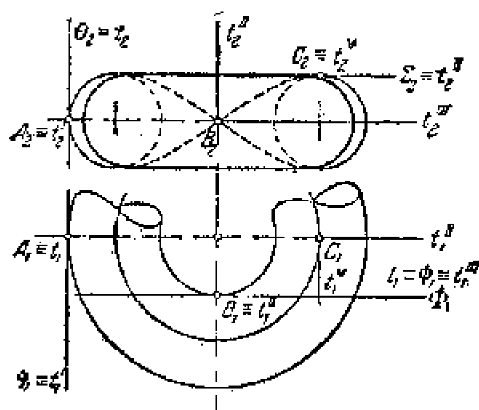


图 307

现在设想有一个带有一族直母线的拗直纹面，例如柱状面或锥状面．在一般情况下，这种曲面的切面与曲面会相交于一条直母线和某一条曲线。这时这条直母线就是通过切面与曲面的切点的那条母线。

如果拗直纹面上有两族直母线（直纹双曲面和直纹抛物面或"拗平面"），则切面总与曲面相交于两条直线，这两条直线就是相交于切点的不同族的母线。

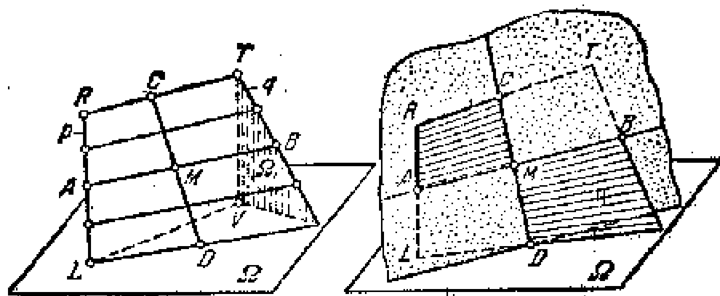


图 308

例 2 试过母线 AB 上的点M作拗平面的切面。该曲面由导线 p 和 q 以及平行导面 Ω 给出(图 308)。

要指出,平面 $\Omega_1(TV\times q)$ 是第二个平行导面,并通过已知点M作属于第二个母线族的母线 CD①。

为此,用点C分割线段 RT 使等于点M分割线段 AB的比值。得到点 C 后引母线 CD。母线 AB 和 CD 是在已知曲面上与它们本身的切线重合的线,因而确定在点M处的切面。因为这些直线既属于曲面,又属于切面,所以它们是曲面和切面的交线。不难证明,曲面不是位在切面的一侧而是位在切面的两侧。

5. **如果切面是过可展曲面上任一点M引出的,则可以证明,该平面将沿着过点M的整条母线相切。**这是可展曲面的最重要的性质之一。从这一点可以引出这种曲面的其余全部性质。所以这一点性质可以取作曲面的可展性的特征(关于这个问题的更详细的情况参看第十一章)。

§2. 作切面的一些例子

1. 在这以前,我们谈过了给出切点后作切面的方法。但是,作切面的问题可以用另一种方式提出:使切面的位置服从于某些其它条件,然后找出切点(在可展曲面的情况下则找出切线)。

譬如,可以作出球面的切面,条件是使它:1)通过不与球面相交的一已知直线;2)平行于某一已知平面等等。

可以作出锥面的切面,使它:1)通过锥面外一点;2)平行于某一直线等等。

这样,切面可以用不同的条件给出,这些条件的特点与曲面的形状有关。

2. 我们来研究几个例子。

例 1 试作一平面$\Theta(\Theta_1, \Theta_2)$,使与球面相切于点$M$(图 309)。

为了解这个问题,先在球面上过点$M(M_1, M_2)$引两条形状和位置都是最简单的曲线:1)水平圆周 $l(l_1, l_2)$;2)正面圆周 $k(k_1, k_2)$。

作出这两个圆周在点M处的切线,其中一条为水平线 $h(h_1, h_2)$,另一条为正平线 $f(f_1, f_2)$。

所求的平面就由这两条直线确定。

---

① 拗平面上不同族的母线的作法参看第七章 §7。

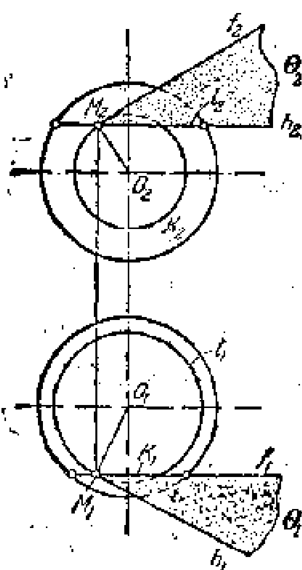


图 309

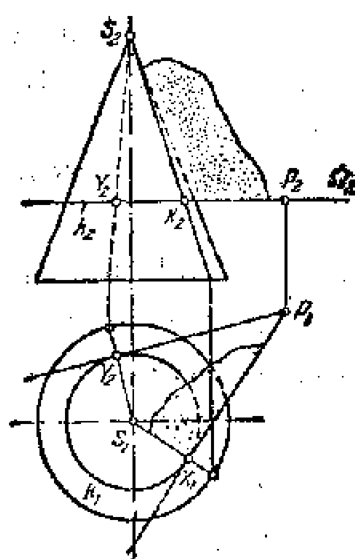


图 310

例 2 试作一平面，使与锥面相切并通过锥面外一点 $P(P_1, P_2)$（图 310）。画出切母线。

过点 $P(P_1, P_2)$ 引水平面 $\Omega(\Omega_2)$，并作出平面 Ω 截割锥面所得的圆周 $k(k_1, k_2)$。由点 $P(P_1)$ 引圆周 $k(k_1)$ 的切线，并标出切点 $X(X_1)$ 和 $Y(Y_1)$。然后找出这些切点的第二个投影 X_2 和 Y_2，再找出切母线 $SX(S_1X_1, S_2X_2)$ 和 $SY(S_1Y_1, S_2Y_2)$。就得到本题的两个解。现在来证明它们的正确性。

例如，讨论平面 $(SX \times PX)$。

确定这个平面的两条直线与锥面上的两条曲线相切：直线 SX 与本身相切，而直线 PX 则与圆周 k 相切。可见该平面确实与锥面相切。又因它通过已知点 $P(P_1, P_2)$，所以是问题的一个解。

如果点 $P(P_1, P_2)$ 与锥顶 S 位在同一水平线上，则上述解法就不适用。

在这种情况下，这样考虑也可得到解答：与具有铅直轴线的圆锥面相切的每一个平面，其水平迹线与切母线互相垂直。因为直线 PS 是切面上的水平线而位在这切面上，所以也垂直于切母线。它与切母线所夹的直角有一条边平行于水平面，因而这直角在该平面上的投影仍为直角。由此可得解题的简单作法。

上述作旋转锥面的切面的方法完全可以应用于具有圆底面的二次锥面。

当旋转锥面用一般形式的锥面（具有任意形状的平面曲导线）代替时，该题也是可解的。

在这种情况下，必须过已知点 P 和锥顶引一辅助直线。其次，应当求出该直线在曲导线所在平面上的迹点，然后过该点引导线的切线。

辅助直线和切线一起确定所求的切面。

例 3 试过旋转曲面上的点 $M(M_1, M_2)$ 作曲面的切面（图 311）。

为了过旋转曲面上的点 M 作两条切线以确定所求的平面，最好选取此两切线切于曲面上通

过已知点的纬圆 $k(k_1, k_2)$ 和子午线 $m(m_1)$。

这时，不需作出子午线 m 的正面投影 m_2。

过点 $M(M_1, M_2)$ 引纬圆 $k(k_1, k_2)$ 的切线，这切线将是水平线 $h(h_1, h_2)$。子午线 m 的切线 $l(l_1, l_2)$ 的作法如下：

将子午线 $m(m_1)$ 转到主子午线 $\overline{m}(\overline{m}_1, \overline{m}_2)$ 的位置。于是点 $M(M_1, M_2)$ 便占有新位置 $\overline{M}(\overline{M}_1, \overline{M}_2)$。

作主子午线在点 $\overline{M}(\overline{M}_1, \overline{M}_2)$ 处的切线 $\overline{l}(\overline{l}_1, \overline{l}_2)$ 并标出它与曲面轴线的交点 $S(S_1, S_2)$。将子午线及其切线反旋转到原先位置，旋转后的切线位置由通过点 $M(M_1, M_2)$ 和 $S(S_1, S_2)$ 的直线 $l(l_1, l_2)$ 确定。所作的直线[即等距线 $h(h_1, h_2)$]和坡线 $l(l_1, l_2)$ 就确定了这个切面。

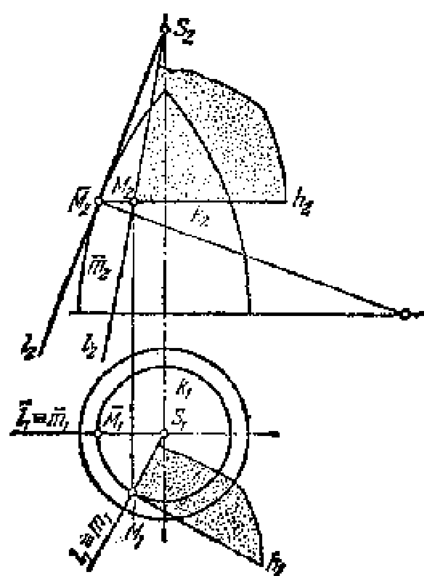


图 311

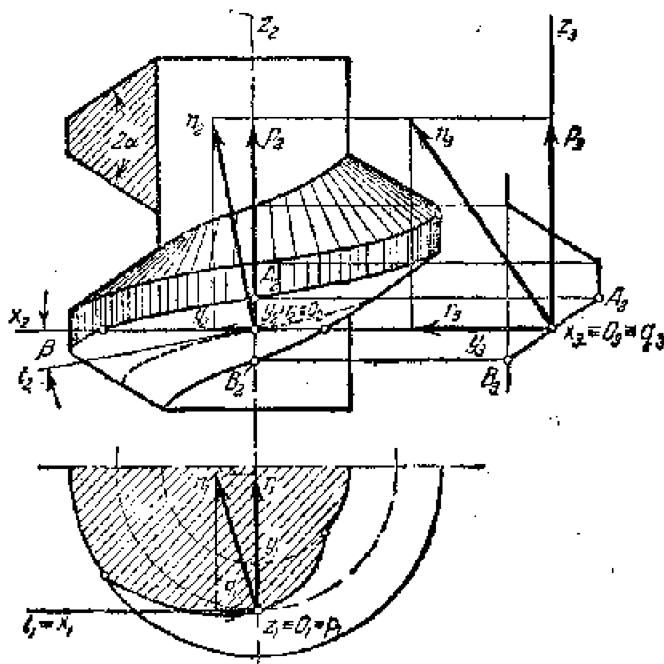


图 312

3. 斜螺旋面的法线　要求过斜螺旋面上已知点 $O(O_1, O_2, O_3)$ 引一法线，沿法线方向从点 O 起截取矢量 $n(n_1, n_2, n_3)$，然后将矢量沿坐标轴 x、y、z 分解为三个分矢 p、q、r（图 312）。

在计算一般最常用的阿基米德蜗杆啮合时就会遇到这个问题。这种蜗杆的工作面由斜螺旋面构成①。如果将蜗轮轮齿与蜗杆丝扣之间的摩擦力忽略不计，则作用于 $O(O_1, O_2, O_3)$（位在蜗杆的节圆柱上）的矢量 $n(n_1, n_2, n_3)$ 可以作为蜗轮的一个齿作用在蜗杆丝扣上所有的力的合力。然而对于强度计算，最重要的不是知道矢量的大小，而是它的分矢 p、q、r 的大小。因此，必须确定这些分矢，其中 p（蜗轮的圆周力）或 q（蜗杆的圆周力）是预先知道的，其它两个分矢必须通过已知的第三个分矢表达出来。应该指出，梯形剖面（蜗杆的丝扣由这剖面作螺旋运动而成）的顶角用 2α 表示，螺旋面上的中间螺旋线的升角用 β 表示。

作了这些解释之后，我们回头来解几何问题。为了过点 $O(O_1, O_2, O_3)$ 引螺旋面的法线，必须过该点作一个切面。在已知情况下，这个切面最好由母线 $AB(A_2B_2, A_3B_3)$ 和过点 $O(O_1, O_2, O_3)$ 切于中间螺旋线的切线 $t(t_1, t_2)$ 给出。这样，切面便由两条等距线确定，因而就可能简单地确定切面上的法线的投影。

① 参看第七章§8。

根据平面的垂线投影的定理，垂线的投影与平行于投影面的等距线的投影互相垂直。根据这个道理，引 $n_2 \perp l_2$ 和 $n_3 \perp A_3B_3$。这样，法线便作出来了。此后可以在法线上取任意线段 $n(n_1, n_2)$，并把它看作是作用于螺杆丝扣上的力的矢量，然后将它分解为分矢，如图上所示。最后，找出这些分矢间的关系：

$$p=p_2=p_3; \qquad q=q_1=q_2; \qquad r=r_1=r_3;$$

$$p=q\cdot \mathrm{ctg}\beta \quad 和 \quad r=q\cdot \mathrm{ctg}\beta\cdot \mathrm{tg}\alpha。$$

§3. 旋转曲面的外形线

1. 先来研究一些与每一个曲面外形线的概念有关的基本情况。

设想有任意的曲面 Φ，并依选定的方向 s 将它平行投射到某平面 Π_1 上(图 313)。有些投射光线将与曲面沿某一曲线 l 相切，在一般情况下，曲线 l 是空间曲线，在特殊情况下，也可能是平面曲线。这条曲线称为**可见轮廓线**。可见轮廓线这个术语可解释如下：如果从曲面外某一个中心 S 进行中心投射，并认为观察者的眼睛就放在这个中心处，于是投射光线与曲面的切线便将曲面分成可见和不可见两部分。

在我们所研究的情况下，与曲面相切的光线形成一个柱面，包围着被投射的曲面。这个投射柱面与不平行于方向 s 的平面 Π_1 相交而给出一条曲线，这曲线称为**已知曲面 Φ 的外形线**。可以简单地说，曲面的投影与投影面的其余部分的分界线称为该曲面的外形线。

因为可见轮廓线上的点位在投射曲面的投射光线上，所以可以断定，**曲面的外形线就是可见轮廓线的投影**。

可见轮廓线在垂直于作有外形线的平面上的投影是一条线，称为**可见性线**。

2. **定理** 如果曲面上有一条与可见轮廓线相交的曲线，则这条曲线的投影与曲面的外形线相切。

设曲面 Φ 上的曲线 m 与可见轮廓线相交于点 M(参看图 313)。

设想在这个点处有两条切线，其中一条与曲线 m 相切，另一条与可见轮廓线 l 相切(在图上这两条切线都没有画出来)。这两条切线确定一个与曲面切于点 M 的平面。过点 M 的投射光线也位在这个平面上，因为这条光线也与曲面相切于点 M。这样一来，切面就是这两条切线的投射平面。

现在，让我们回想一个定理，即曲线的投影的切线就是该曲线的切线的投影①。在目前的情况下，两切线的投影重合；因此曲线 m_1 和 l_1 互切。定理于是证明。

3. 试来研究旋转曲面的外形线的作法。假设曲面的轴线任意倾斜于投影面，要求在该投影面上作出曲面的外形线。

为了作图简单，取一个轴线 $i(i_1, i_2)$ 作正平线放置的曲面(图 314)。这时，曲面的正面投影使用曲面的主子午线的投影来确定，这主子午线假定是事前给定的。现在来作曲面在水平面上的外形线(即作曲面的投影的界线)。为此，作一个内切于曲面的辅助球面，并标出其相切的圆 $v(v_2)$。旋转曲面和球面在切圆的每一点处都有一个公共的切面。从这些切面里可以挑出两个

① 参看第六章 §1。

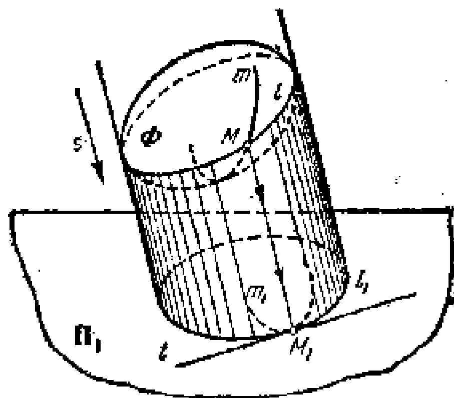


图 313

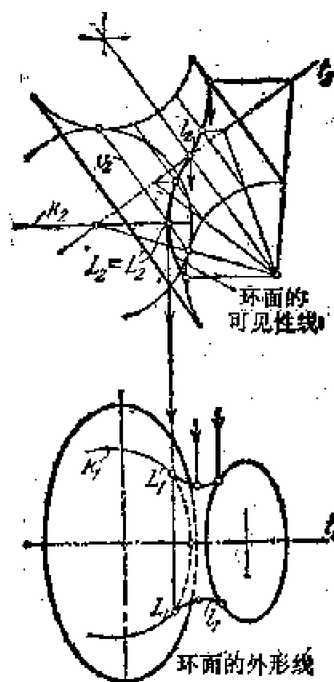


图 314

水平投射面，它们与曲面切于可见轮廓线上的点。但是这样的平面必然与球面的赤道圆 $k(k_1, k_2)$ 相切。因此，上述的点既在切圆 $v(v_2)$ 上，又在球面的赤道圆上。也就是说，这些点可以在上述的切圆与赤道圆的相交处找到。

在 Π_2 上找出各可见性点后，就可找到它们的水平投影，这些投影就是所求的曲面外形线上的点。

在图 314 上标出了相应的点 $L_2 \equiv L_2'$。这个点应当看作是可见轮廓线上的两个点 L 和 L' 的正面投影。点 L 和 L' 的水平投影是借助这些点所在的球面赤道圆的水平投影 k_1 找到的。

如果不是要求在水平面 Π_1 上而是要求在其它任意一个面上作外形线，作图方法当然是同样的，只是用辅助球面的一个大圆来代替赤道圆，大圆所在的平面垂直于外形线的投射方向。

4. 我们来研究作曲面外形线最常应用的一种情况——作旋转锥面的外形线(图 315)。

设圆锥面具有按正平线配置的轴 $i(i_1, i_2, i_3)$，并给出了它的呈三角形的正面投影。

求作它在平面 Π_1 和 Π_3 上的投影的外形线，不要画出它的圆底面在这两个平面上的投影(不作出椭圆)。

在圆锥面的轴线上取一个任意点 $C(C_1, C_2, C_3)$。以它作为内切球面的中心，并作出这个球面的正面投影，标出球面与圆锥面相切的圆周 $k(k_2)$。其次，标出切圆与球面赤道圆的交点(点 L 和 L') 和切圆与侧面的子午线的交点(点 T 和 T')。如果从上往下看，则圆锥面的可见轮廓线(直线 q)通过点 L，而如果从左往右看，则可见轮廓线(直线 t)通过点 T。

根据点 L、L'、T 和 T' 的投影，可作出圆锥面的水平投影和正面投影的外形线。

5. 我们来研究圆环面的外形线的作法。可以设想圆环面被许多内切球面充满着，它们的中心在圆环面的轴线圆周上，因此，圆环面可以看作是上述各球面的包络面。

假定已给出轴线圆周的投影(椭圆)和圆环面的圆周母线的半径(图 316)。画出上述各球面的投影，这些投影都是圆周。于是，这些圆周的包络线便确定曲面的外形线。当内切球面(圆周)的数量足够多时，外形线就不

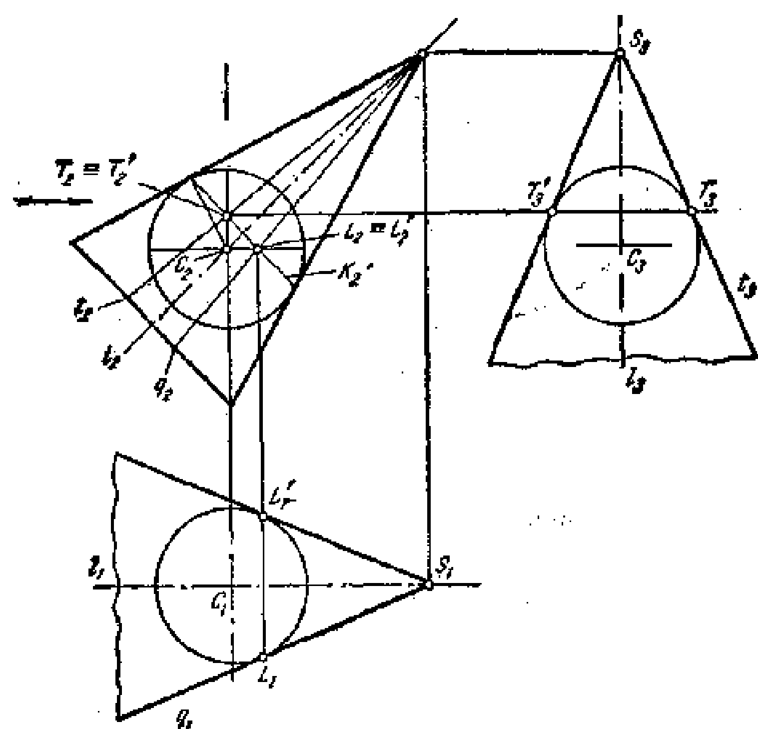


图 315

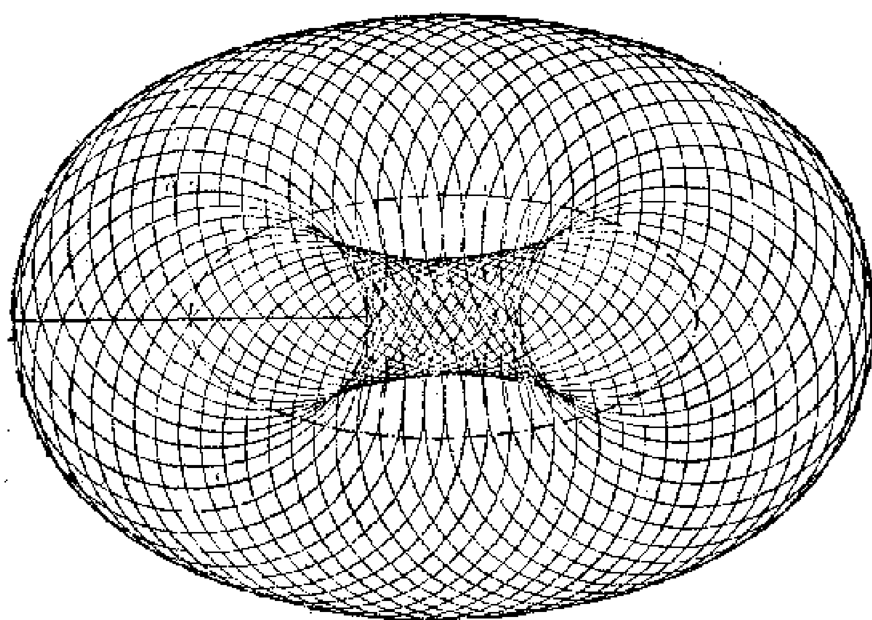


图 316

必特别作出，因为它本身已显示得很清楚了。这外形线由两部分组成：一部分从外面限定投影的范围；另一部分从第一部分的里面得到。整条外形线称为环影线。上述外形线的第一部分的全部和第二部分的一部属于圆环面的外形线的可见部分(图 317)。圆环面的外形线完全可以象在图 314 所作的那部分圆环面外形线那样来作图。这个方法虽然很麻烦，但却比较准确。

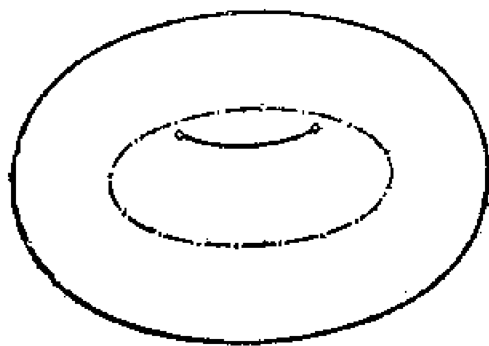


图 317

复 习 题

1. 怎样定义曲面的切线和曲面的切面的概念？
2. 过曲面上一点作切面的方法是怎样的？
3. 在作过给定直纹面上任意一点处的切面时，怎样使表达方法简化？设直纹面具有：
1）一族直母线；
2）两族直母线。
4. 曲面上怎样的点称为普通点和奇异点？试举出一些例子。
5. 什么叫做曲面的法线？
6. 怎样作球面的切面，使它平行于已知交叉两直线？
7. 试证明旋转曲面的主子午线上一点的切面是投射面。
8. 怎样作三个球面的公切面？当这些球面不相交时可有几个解？

练 习 题

1. 已知一个一般位置平面的复合投影，在平面上选取一个任意点，作一半径 $R=30$ 毫米的球面使与平面切于该点。

2. 已知一圆锥面和一条一般位置直线。试作一平面与圆锥面相切并平行于已选定的直线。

3. 已知一旋转锥面和一个一般位置平面。试作一平面与锥面相切并垂直于已选定的平面。本题有几解？是否总是有解？

4. 已知一球面。试作球面的切面，使与三个投影面的倾角都相等。

5. 已知一旋转锥面和一球面。试作它们的公切面。当两曲面不相交和相交时，各可能有几解？

6. 试作一旋转曲面的正面投影和侧面投影的外形线，该曲面的水平投影已给出在图 318 上。

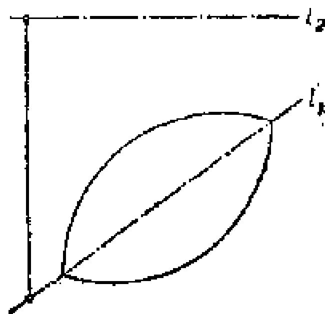


图 318

第九章 平面与曲面相交、直线与曲面相交

§1. 平面与曲面相交

1. 由平面与曲面相交而得的线是截平面上的平面曲线。

为了在图上作出这条曲线的投影，需要找出曲线上各个点的投影，并将各点的同名投影用曲线板连成光滑的曲线，就得到所求交线的投影。

在交线的各点中，有些点与众不同，它们对投影面处于特殊位置，或者在曲线上占有特殊地位。例如：对某投影面的最近点和最远点(极端点)；位在某些曲面的边界母线上的点（其投影在外形线上的所谓可见性点)；交线的最宽点等等。这样的点称为**特殊点**。

甚至在作平面与曲面的交线的同一个问题中，每一个特殊点经常都是用其独有的方法求出的。交线上其余的点称为**一般点**或**普通点**，它们都可用同一个方法找到，这个方法是解上述问题的基本方法。

2. 作平面与曲面的交线的基本方法如下。

作辅助平面使与两已知形体相交。这时，该辅助平面通常与曲面交于一条曲线，而与截平面交于一条直线。

如果所得的曲线和直线是相交的，则显然它们的交点既属于曲面，也属于截平面，因而是截平面与曲面的交线上的点。用这样的方法就可以找到交线上任意多的一般点。在某些情况下，也可以确定个别的特殊点。

在实际应用这种求交线的一般方法时，应当这样来考虑选择辅助平面，即尽可能使它与曲面的交线最简单(圆或直线)。此外，使所得的圆的投影具有最简单的形状也很重要，即要使圆的一个投影也是圆，而另一个投影为直线段。

后一个条件不仅与曲面本身的形状和辅助平面的位置有关，而且与曲面对投影面的位置也有关。所以，曲面本身对投影面的位置应该选择得当。

上述求平面与曲面的交线的方法称为**辅助平面法**。这正是作两个一般位置平面的交线时应用过的方法。以后会看到，它只是作两个曲面的交线时应用的更一般的方法(**辅助曲面法**)的特殊情况。

3. 为了说明上述方法，试研究一个例子：作正面投射面$\Theta(\Theta_2)$与旋转曲面的交线(图 319)。

首先着重指出，两个已知形体在图上的位置有一个公共对称平面$\Sigma(\Sigma_1)$，那就是旋转曲面的主子午线所在的平面。

事实上，垂直于平面$\Theta(\Theta_2)$的任何平面一般都可以说是平面Θ的对称平面，而通过曲面轴线的每一个平面都是曲面的对称平面。公共对称面应满足上述两个条件，而$\Sigma(\Sigma_1)$显然是这样

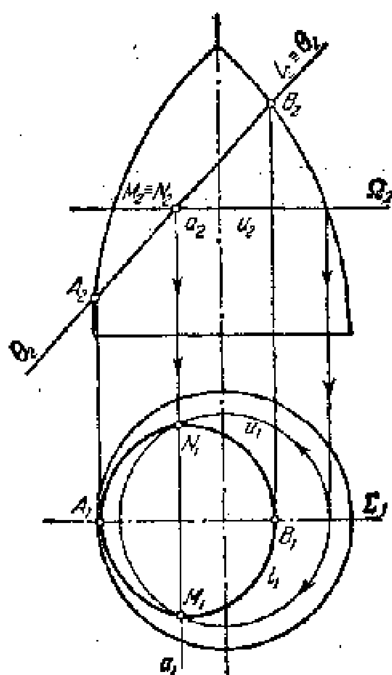


图 319

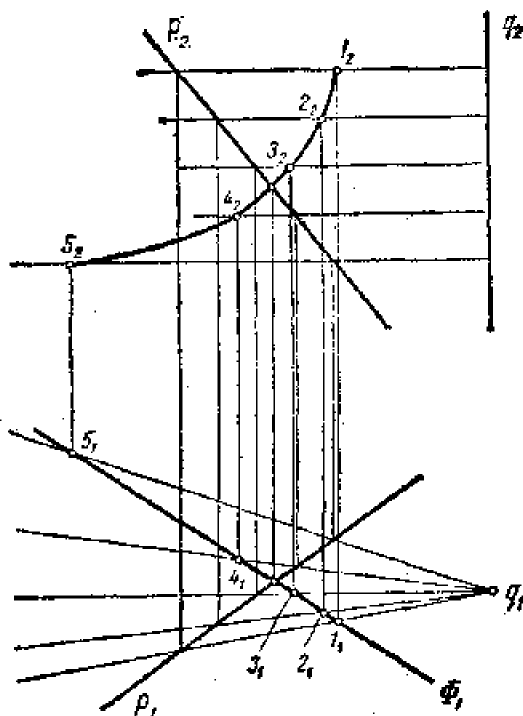


图 320

的平面。因此，所求的交线也对称于平面 Σ，而交线的水平投影则对称于直线 Σ_1。

我们来求交线上的各个点。首先标出特殊点：最低点 $A(A_1, A_2)$和最高点 $B(B_1, B_2)$。

因为这两个点在曲面的主子午线上，所以标注出 A_2 和 B_2 之后，就可以在这子午线的水平投影上找到 A_1 和 B_1。

为了作出一般点，引辅助水平面 $\Omega(\Omega_2)$，并作出它与已知曲面和截平面Θ的交线的投影。这些交线就是圆周 $u(u_1, u_2)$和直线 $a(a_1, a_2)$。找出所得交线的交点$M(M_1, M_2)$和$N(N_1, N_2)$，它们即属于所求的交线。

在直纹面上，不难作出它们的直母线。因此，当直纹面与平面相交而求交线上的点时，不需使用辅助截平面。在这类问题中，所求曲线上的点可作为曲面的母线与已知截平面的交点求出。

例如，设要用平面截直纹抛物面。抛物面用两条导线 $p(p_1, p_2)$和 $q(q_1, q_2)$以及水平的平行导面 Π_1 给定。

取水平投射面作为截平面 $\Phi(\Phi_1)$（图 320）。

作所给曲面上平行于平面 Π_1 的一系列母线，然后求出它们与平面 $\Phi(\Phi_1)$的交点。

这些点（1、2、3、4、5）属于所求的交线。在已知情况下，得到的交线是双曲线，它的正面投影也是双曲线。

不难截该曲面，使所得的交线为抛物线。

§2. 平面与曲面的交线的作法

1. 利用上面所述的一般方法来解一些例子。

例1 二次锥面由顶点 $S(S_1, S_2)$ 和水平配置的圆底面给定。

用垂直于锥轴 SO 的平面截锥面，求作所得截面（法截面）的投影（图 321）。

为了求锥面的法截面，我们变换其图形，使它的轴线 SO 在图形变换后成为等距线。在本情况下，最方便的是用更换投影面法来实现变换。

因此，我们引入一个新的投影面 Π_4，使它垂直于 Π_1 并平行于锥轴，再在场 Π_4 上作出锥面的新投影。

垂直于锥轴的平面 Ω 在场 Π_4 上表现为直线 Ω_4，在这里我们可以立即标出两个特殊点 $A(A_4)$ 和 $B(B_4)$，它们位于锥面在 Π_4 上的投影外形母线上。

作出这些母线在场 Π_1 和 Π_2 上的投影，并求出点 A 和 B 的水平投影和正面投影。

在锥面的水平投影外形母线 $S_1 1_1$ 和 $S_1 2_1$ 以及锥面的正面投影外形母线 $S_2 3_2$ 和 $S_2 4_2$ 上，还可各得两个特殊点（可见性点）。

为了作出这些点，必须求出所述母线在场 Π_4 上的投影并在那里标出所求的点的投影。根据这些投影就不难求出其余的投影。同样也可作出所求交线上的中间点（可见性点的作法在图上没有表示出来）。

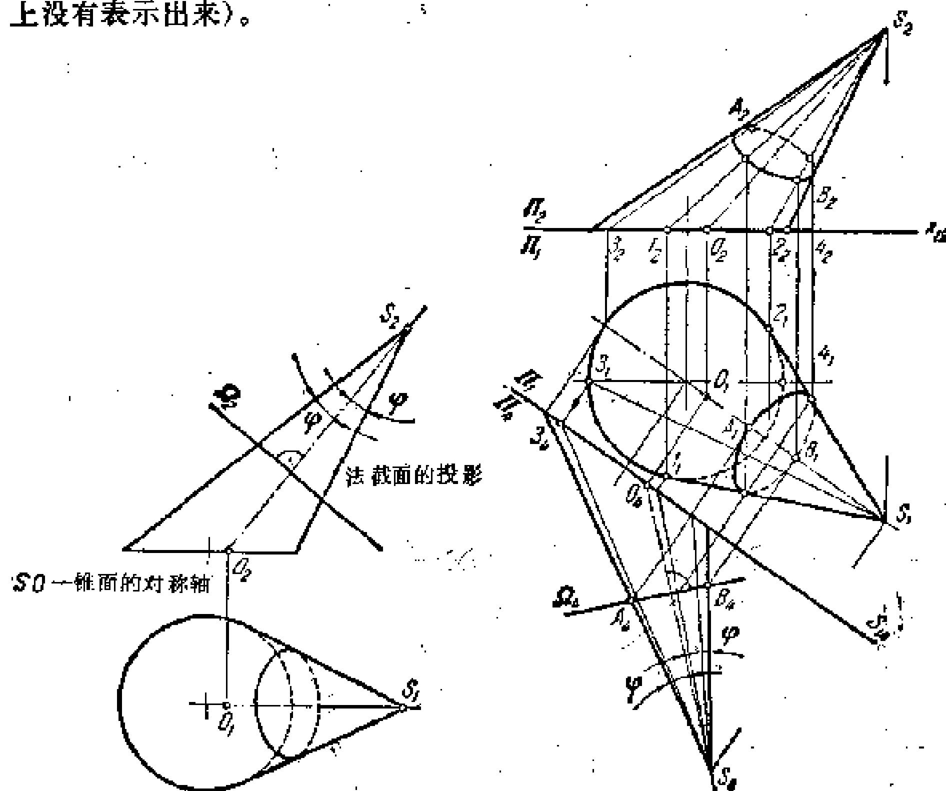


图 321

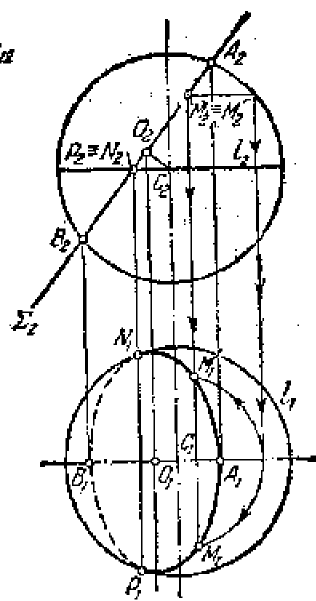


图 322

例2 求作正面投射面与球面的交线（图 322）。

平面截球面于圆周。这个圆周的正面投影因为与截平面 $\Sigma(\Sigma_2)$ 的投影重合，所以是已知的。剩下的是作水平投影。这个投影是椭圆。

先作特殊点的投影。截面图形的最高点是点 $A(A_1, A_2)$，最低点是点 $B(B_1, B_2)$。在球面的赤道圆 $l(l_1, l_2)$ 上标出了可见性点 $P(P_1, P_2)$ 和 $N(N_1, N_2)$，它们将交线的水平投影分为可见和

不可见两部分。在正面投影上，在线段 A_2B_2 的中间标出点 O_2，它是圆截面的中心的正面投影。沿连系线找到这个中心的水平投影 O_1。在连系线 O_1O_2 的方向上从点 O_1 向两边截取圆截面的半径，它等于 O_2A_2。这就得到作为圆的投影的那个椭圆的长轴，它的短轴为 A_1B_1。

在图上还表示出两个一般点 $M(M_1, M_2)$ 和 $M'(M_1', M_2')$ 的作法。

在截面的正面投影上任取一点 $M_2 \equiv M_2'$，然后据此找出它们的对应水平投影。这些水平投影是利用球面上通过点 $M(M_2)$ 和 $M'(M_2')$ 的水平圆周作出的。水平投影 M_1 和 M_1' 的作法在图上用带箭头的线表示。

例 3 求作正平面 $\Theta(\Theta_1)$ 与圆环面的截面(图 323)，已知母线圆的半径和母线圆的中心圆的半径之间的关系是 $r=\frac{R}{2}$，而截平面 $\Theta(\Theta_1)$ 与圆环面切于最小纬圆上的一点。

交线的特殊点是：1)截平面的切点 $A(A_1, A_2)$；2)最右点 $B(B_1, B_2)$；最高点 $C(C_1, C_2)$ 和最低点 $D(D_1, D_2)$。一般点 $M(M_1, M_2)$ 是借助水平辅助面 $\Sigma(\Sigma_2)$ 找到的。这时，先在正面投影上标出 Σ_2 与主子午线(圆周)的投影的交点，然后找出这些点的水平投影。利用这些水平投影便可作出平面 Σ 截圆环面所得的那两个圆的水平投影。用点 M_1 表示较小的一个圆与截平面的水平投影的交点。沿着从 M_1 引出的连系线在 Σ_2 上找到 M_2。在本情况下交线各点作法的其它特点在图上看得很清楚。

根据本例题所给的条件，说明交线本身是柏努利双纽线，因而与它全等的正面投影也是柏努利双纽线。

在笛卡儿坐标系中，双纽线的方程具有下面的形式：

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0$$

式中 c 为常数。

将圆环面放入空间直角坐标系中，使坐标原点与圆环面的中心重合，轴 y 与圆环面的轴重合。轴 x 和 z 的方向如图 323 所示。

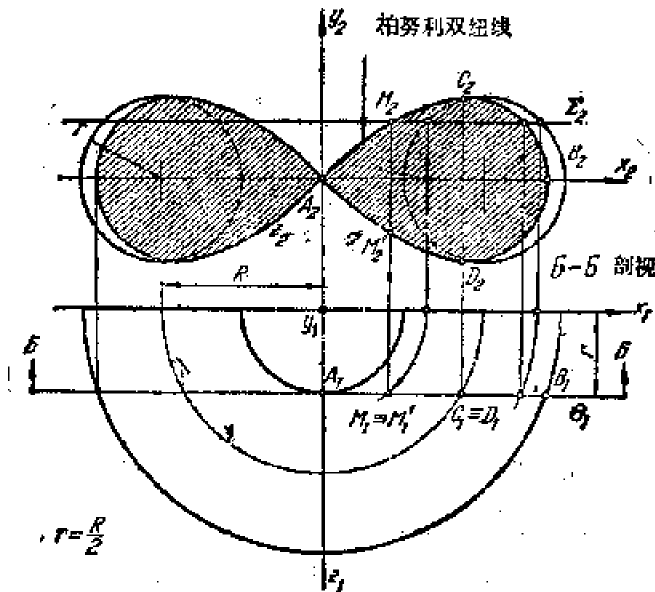


图 323

注意上述母线圆(子午线)的半径和中心圆的半径的关系$\left(r=\frac{R}{2}\right)$，便可写出这个属于旋转曲面的圆环面的方程。

子午线的方程是：

$$(x-R)^2+y^2=r^2,$$

为了获得具有这一子午线和以 y 为轴的旋转曲面的方程，我们以$\sqrt{x^2+z^2}$代替 x，就得到：

$$(\sqrt{x^2+z^2}-R)^2+y^2=\frac{R^2}{4}。\qquad (1)$$

这就是圆环面的方程。

平行于平面 xOy 并与圆环面相切于最小纬圆的截平面的方程是：

$$z=\pm\frac{R}{2}。\qquad (2)$$

方程(1)和(2)确定截平面与圆环面的交线。

为了得到这交线在平面 xOy 上的投影的方程，我们从这两个方程中消去 z，就得到：

$$\left(\sqrt{x^2+\frac{R^2}{4}}-R\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4},$$

经过简单的变换之后，得出：

$$(x^2+y^2)^2-2R^2(x^2-y^2)=0。$$

2. **例4** 试画出样板车刀的切削刃，该车刀用以车削如图 324 所示的旋转体零件。围成这个零件的旋转面在图上是这样画出来的：作为该曲面的正面投影的两个圆已完全画了出来，而水平投影仅画出半个零件，并且画上了细线。

车刀的切削刃是刀刃的前面，即平面 $\Sigma(\Sigma_2)$，与该零件的表面的交线。

在给出前棱面，即平面 $\Sigma(\Sigma_2)$的正面投影时，也就得到切削刃的正面投影 A_2B_2，根据它就可以作出切削刃的水平投影。图上表示了点M的投影 M_1 的作法，这个点的正面投影 M_2 是在 A_2B_2 上任意选定的。求 M_1 的过程已用箭头表示。切削刃其余的点的水平投影可用同法求出。

此后求切削刃的实形。为此，在平行于平面 $\Sigma(\Sigma_2)$ 的辅助平面 Π_4 上作出它的投影。

在本情况下，车刀的后"棱面"是柱面，柱面的导线是切削刃，而所有的母线平行于正立投影面 Π_2。注意到这个情况，就可以作出法截面 $I—I$，即车刀的断面。

这个截面用 $A_5M_5C_5B_5$ 表示。根据已得的资料就能作出磨车刀用的样板。

例5 求作一般位置平面与椭圆抛物面的截面(图 325)。

截平面由直线 $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ 和点 $M(M_1, M_2)$ 给出，并且直线 AB 位在作为抛物面对称面的正平面上。

如果截平面以任意另一个样子给出，为了便于解题，则应在该平面上作出所述的直线和取任意一点，例如 $M(M_1, M_2)$。

解题的方法将以空间连同已知图形的延伸为基础。我们取抛物面的正平面对称面作为空间的不动的平面，而被延伸的空间中的所有的点都沿着垂直于该平面的方向移动而离开该平面。现在来建立一个延伸变换，使抛物面的底面椭圆变为圆。

这个延伸的特征可以用一个等于比$\frac{R}{b}$的延伸系数来表示，式中的 b 是底面椭圆的短半轴，而 R 是圆的半径(这就是说，空间每一个点在延伸之后离开不动的平面的距离可用原来的距离来表达：$y'=\frac{R}{b}y$)。

可以证明，这个延伸将椭圆抛物面变换为具有同一轴线的旋转抛物面。

因为在上述变换之下，所有的点垂直于正平面移动，所以它们的正面投影保持不变，而新的水平投影可借助简单的"钥图"作出。在图 325 上，"钥图"是根据线段 R 和 b 作出的，并用箭头表示怎样将线段 b 变换为线段 R，

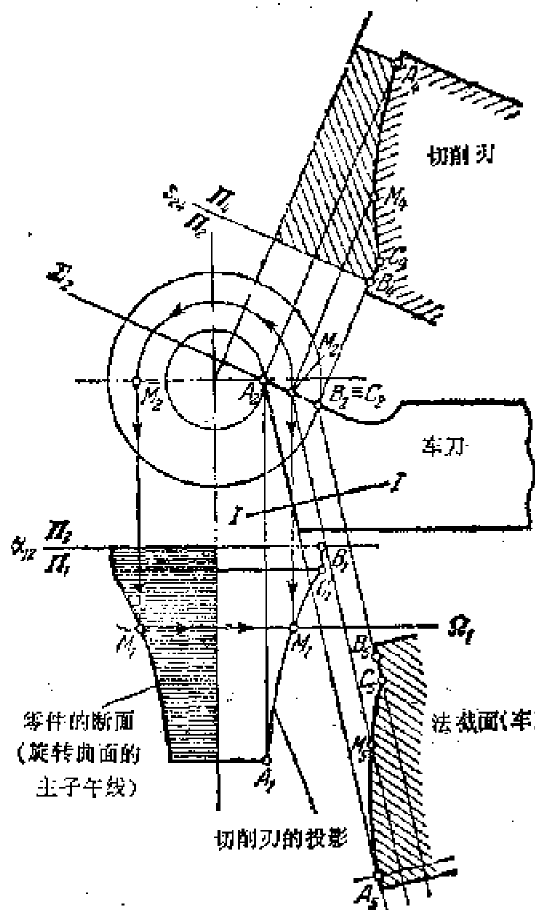


图 324

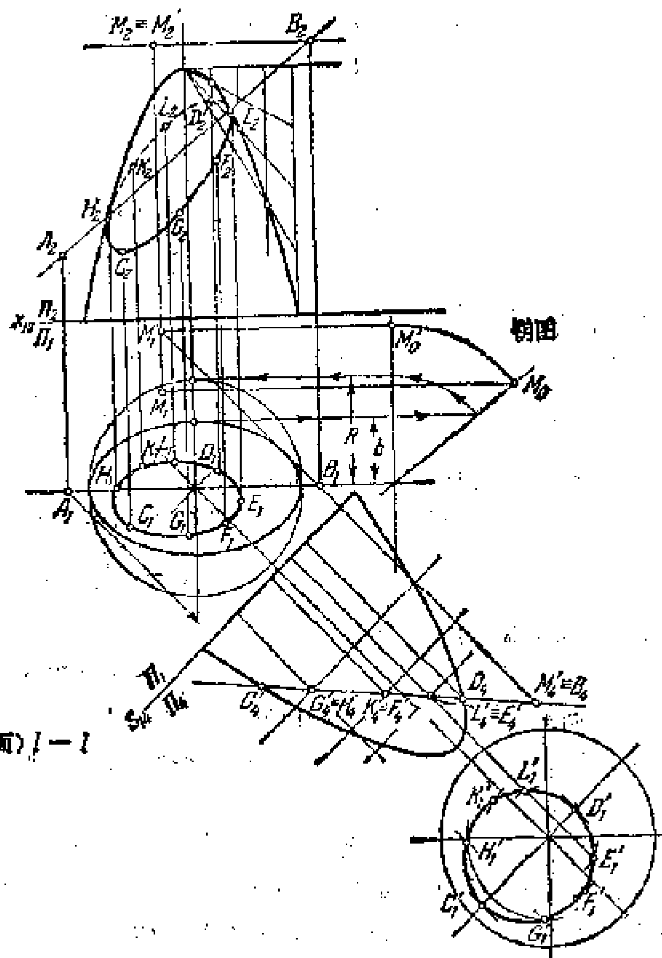


图 325

现在将给出的截平面进行延伸。显然，这只要找出一个点 $M(M_1, M_2)$ 的新位置就行，因为 $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ 位在不动的平面上。为此，从点 M_1 引水平线 M_1M_0，将点 M_0 移到位置 M_0' 并找出 M_1'，如图所示。这时，点 M 的正面投影仍然不变：$M_2'=M_2$。变换后的平面现在由直线 AB 和点 $M'(M_1', M_2')$ 确定。

这样，便将给出的问题变为一个更简单的问题，即旋转抛物面与新平面相交的问题。随后就可以用一般的方法进行解题：先将图形变换，使截平面成为投射面，然后找出交线的投影。

为此，在图上作出截平面的水平线 $M'B(M_1'B_1, M_2'B_2)$，并引入垂直于该水平线的新投影面 Π_4。在新投影面上作出截平面的投影(直线)和旋转抛物面的投影(抛物线)。随后利用在水平面 Π_1 和新平面 Π_4 上的投影找出交线上的点。但这会使水平投影模糊不清，因此在图的右下角还作出一个辅助的水平投影。

在这个水平投影上作出点 C_1'、D_1'、E_1'、F_1'、G_1'、H_1'、K_1'、L_1' 之后，它们到不动的平面的距离按比例缩短了，该比例与当初形体延伸时所用的比例相同，这已借助已有的钢图作出。

结果得到交线在平面 Π_1 上的水平投影。利用从水平投影各点引出的连系线并把这些点升高(这些点取自平面 Π_4 上的投影)，交线的正面投影就作出来了。

§3. 圆 锥 截 线

1. 二次锥面与平面相交而得的线称为圆锥截线。

这些线有：椭圆、抛物线、双曲线、圆、二重直线、两相交直线，最后是点。

现在来研究获得每种截线的条件。为此选择二次锥面的特殊形式，即普通的旋转锥面来研究。为了使作图简单，我们先研究圆锥面与投射面的相交(图 326)。

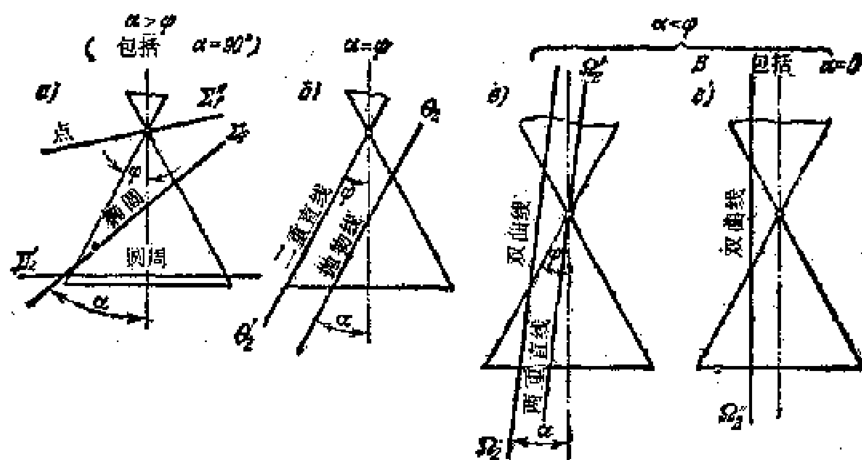


图 326

2. 如果平面 $\Sigma(\Sigma_2)$ 与圆锥面的所有母线相交，则交线在一般情况下为椭圆。

因为这时截平面 $\Sigma(\Sigma_2)$ 不平行于圆锥面的任何一条母线，所以它与每一条母线都相交于有限点而没有一个无穷远点。可见，椭圆是一条没有无穷远点的曲线。在特殊情况下，截线可能不是椭圆而是圆，或者甚至是一点。

3. 如果截平面 $\Theta(\Theta_2)$ 平行于圆锥面的一条母线，则截线为抛物线。

除了与截平面 $\Theta(\Theta_2)$ 平行的一条母线之外，截平面与所有其余母线都相交。因此，除了截平面上的有限点外，抛物线还有一个无穷远点。

这里也有特殊情况，可能得到的是直线而不是抛物线，当截平面变成圆锥面的切面时就是这样。这种平面可以认为是极限的"截"平面。此外，它"平行"于圆锥面的一条母线，因为平面通过一直线完全可以看作是平行的特殊情况。但是，在这里这条直线形式的截线图形应当看作是一条二重直线(这可以这样解释：在解析上确定抛物线的二次方程在这种情况下分解为两个方程，每一个方程确定一条直线)。

4. 如果截平面 $\Omega(\Omega_2)$ 平行于圆锥面的两条母线，则得到双曲线。显然，根据讨论椭圆和抛物线的同样理由，可以断定双曲线有两个无穷远点。这样一来，由截平面截割圆锥面而得的上述三种曲线可以用无穷远点的数量来区分：椭圆没有无穷远点；抛物线有一个无穷远点；而双曲线有两个无穷远点。与上述 3 类似，如果截平面通过两条母线，则可以认为它是"平行"于这两条母线的，这时截线图形就是这两条母线本身。于是我们得到了所谓分解或退化为两相交直线的双曲线。

5. 还应该注意当截平面平行于锥轴这一特殊情况(参看图 326 右边)。在这种情况下，截平面平行于两条母线，这两条母线的投影与锥轴重合。因此，平行于锥轴的平面与圆锥面相交于双曲线。

各种圆锥截线的特征还可以用另一种形式表达。

以 φ 表示锥顶角的一半，以 α 表示截平面对锥轴的倾角（参看图 326）。于是，如果 1）$\alpha>\varphi$，则截线为椭圆，2）$\alpha=\varphi$，则截线为抛物线，和 3）$\alpha<\varphi$，则截线为双曲线。

6. 我们来证明旋转锥面与平面相交成 $\alpha>\varphi$ 时，截线为椭圆（图 327）。平面截割锥面所得的截线图形的正面投影表现为线段 P_2Q_2。我们在平行于平面 $\Theta(\Theta_2)$ 的任意一个投影面 Π_4 上作截线的投影。

在锥面里作两个内切球面同时与截面相切。球面与锥面相切于圆周，其正面投影表现为直线段 A_2B_2 和 C_2D_2。

标出球面与平面 $\Theta(\Theta_2)$ 的切点 $F(F_2, F_4)$ 和 $F'(F'_2, F'_4)$。在截线图形上取任一点 $M(M_2, M_4)$，通过该点引母线 $TR(T_2R_2)$，又通过该点引直线与点 $F(F_2, F_4)$ 和 $F'(F'_2, F'_4)$ 相连接。

大家知道，过一点对球面所引的切线，其长度相等。

据此，可以看出，$MF=M_4F_4=MR$ 和 $MF'=M_4F'_4=MT$（这时 MR 和 MT 是空间线段）。

由此求得，$MF+MF'=MR+MT=RT=A_2C_2$，因为空间线段 RT 的长度与 A_2C_2 相同。由此得出，截线上任意一点到两个固定点 F 和 F' 的距离之和为常数。

因此，这曲截线实际上是一个椭圆[①]。

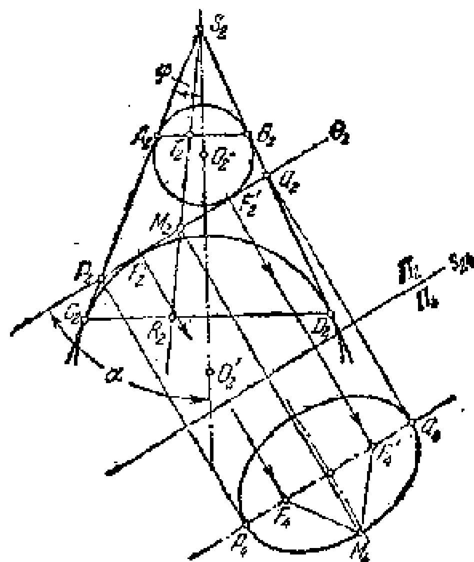


图 327

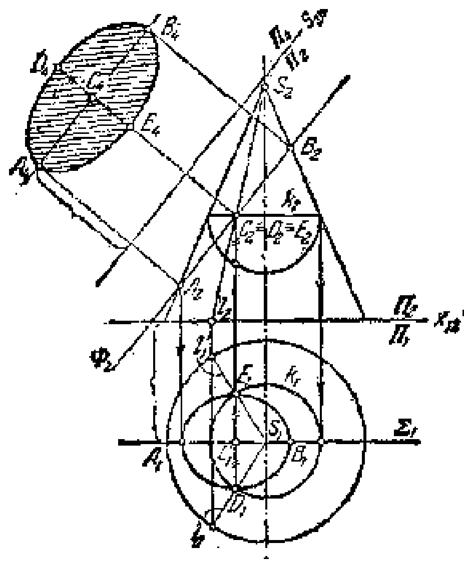


图 328

§4. 圆锥截线的投影

试研究在复合图上作圆锥截线的一些例子。

例 1 设圆锥面 $S(S_1, S_2)$ 与正面投射面 $\Phi(\Phi_2)$ 交于椭圆（图 328）。试求截线图形在 Π_1 和 Π_2 上的投影及其实形。

为了作截线图形的正面投影，只要在 Π_2 上标出点 A_2 和 B_2，线段 A_2B_2 就是这个图形的正面投影。然后就可以作出其水平投影的任意多个点。为此，作出这截线的正面投影之后，必须在正面投影上标出截线图形的一个任意点，并过该点引锥面上的一条简单的辅助线（圆锥面的母线

① 利用上述方法证明所有这三种情况是由比利时数学家丹捷连提出的（1828）。

或锥面上的圆）。然后作辅助线的水平投影，再沿所选的点的铅直连系线在该辅助线上找出该点的所求水平投影。

由于给出的锥面 $S(S_1, S_2)$ 和平面 $\Phi(\Phi_2)$ 具有一个公共对称面，即通过锥轴的正平面 $\Sigma(\Sigma_1)$，所以截线图形本身及其水平投影也对称于这个平面，而水平投影还对称于轴 Σ_1。所以正面投影的一个（二重）点对应于水平投影的两个不同的点。

譬如，如果在正面投影上标出点 $D(D_2)$，就可以通过该点引母线 $l(l_1, l_2)$ 或圆 $k(k_1, k_2)$。在水平投影 l_1 和 k_1 上找到对应的点 D_1。同样也找到点 $E(E_1, E_2)$。不难看出，线段 $A_2B_2=AB$ 是截线椭圆的长轴，而线段 $D_1E_1=DE$ 是它的短轴。点 D_2 是线段 A_2B_2 的中点。

因为在一般情况下椭圆正投射仍为椭圆，所以截线图形的水平投影也是椭圆，其长轴是线段 A_1B_1，而短轴是线段 D_1E_1。

这样，我们就确定了截线上所有的特殊点。用这种方法还可以确定一般点。

截线椭圆的实形可以很容易在平行于截平面 Φ 的新投影面 Π_4 上作出。

例 2 试研究作圆锥截线的更一般的情况。即截平面 Φ 是一般位置平面，并且由对平面 Π_1 的坡线 $r(r_1, r_2)$ 给定（图 329）。截线图形在 Π_1 和 Π_2 上的投影是利用所给元素在平面 Π_4 上的辅助投影作出的。这时，选择平面 Π_4 垂直于截平面 Φ。在这种情况下，Φ 是 Π_4 的投射面，在 Π_4 上表现为直线 Φ_4。

在投影面体系 (Π_1, Π_4) 中，本题的解法与上题相同。

这里比上题增多的是：利用正面投影的外形母线确定了截线图形在正面投影上的可见性点——$F(F_2)$ 和 $G(G_2)$。

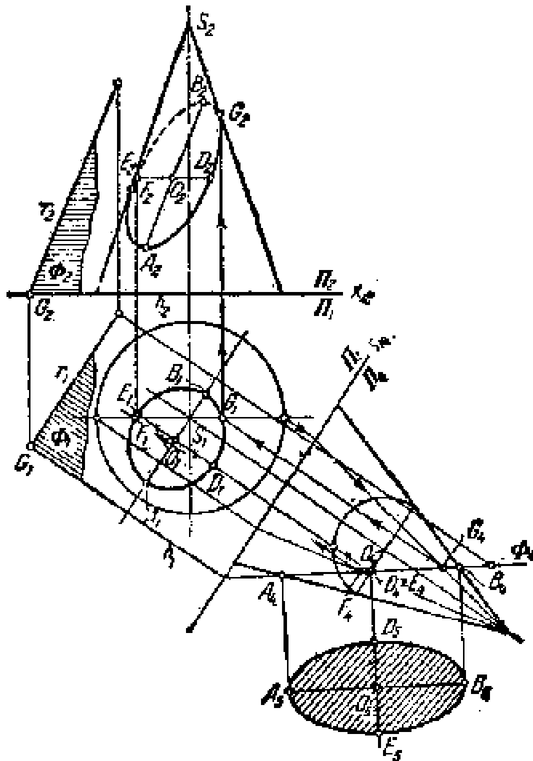


图 329

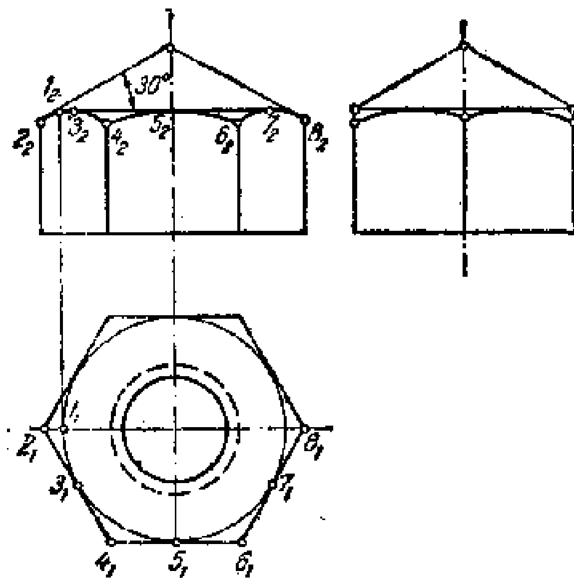


图 330

例 3 双曲线，作为锥面与平行于其轴线的平面的交线，在技术造型中常常碰到。譬如，带圆锥倒角的六角螺母、倒角的一条边界线为圆，而另一条边界线由六段相同的双曲线组成(图 330)。

在图 331 上表示出具有铅直轴的锥面 $S(S_1, S_2)$ 与正平面 $\Omega(\Omega_1)$ 相交所得双曲线的正面投影的作法。

因为平面 $\Omega(\Omega_1)$ 是水平投射面，所以双曲线的水平投影为与 Ω_1 重合的直线。

在锥面底圆的水平投影上标出点 A_1 和 B_1，就可在这个圆的正面投影上找到投影 A_2 和 B_2。

同样，将每一个点 $M(M_1)$ 与锥面上的圆连系起来，就不难找到它的正面投影 M_2。

至于呈双曲线形状的圆锥倒角边界线的作法，可按下列步骤进行。给出六棱柱的投影并作出其底面的内切圆，与底面各边切于点 3、5、7……(参看图 330)。

对标出了的点 1_1，我们求出其正面投影 1_2，并过 1_2 引一条与水平方向成 30° 角的直线，于是得到点 2_2。根据 2_2 确定 4_2、6_2 和 8_2。

通过每组三个点——2、3、4；4、5、6；6、7、8 各引一双曲线，在工程图上，每条双曲线都用由三个点确定的圆弧来代替。

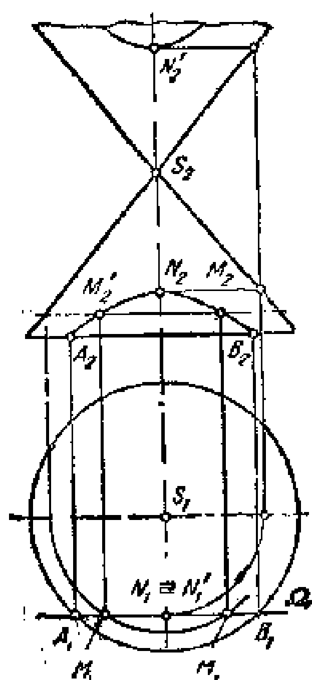


图 331

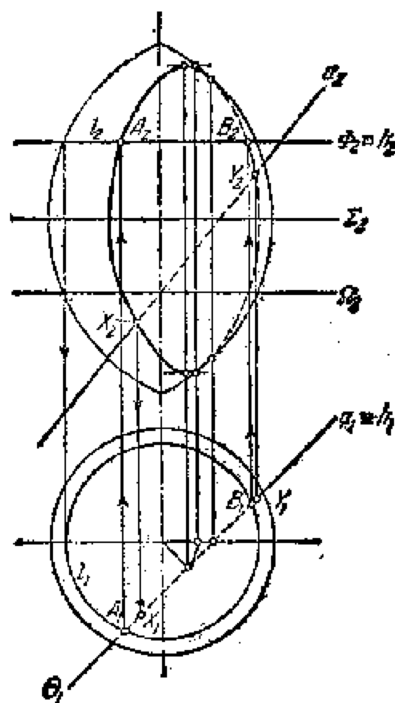


图 332

§5. 直线与曲面相交

1. 在画法几何中，关于求直线与任何曲面的交点的问题在一般情况下是这样解的：1)过直线引辅助平面；2)求辅助平面与已知曲面的交线；3)求所得的交线与已知直线的交点。

过一直线可以作任意数量的不同的平面，但为了解题简单，选择辅助平面时，要使它与已知曲面的交线作起来尽量简单。

设要求找出直线 $a(a_1, a_2)$ 与旋转曲面的交点(图 332)。

在这情况下，最方便的是过直线 $a(a_1, a_2)$ 引一个任意投射面。设所引的是水平投射面 $\Theta(\Theta_1)$，在图上标记为 $\Theta_1 \equiv a_1$。现在来求平面 Θ 与曲面的交线。为此，引入一系列的辅助水平面 $\Phi(\Phi_2)$、$\Sigma(\Sigma_2)$、$\Omega(\Omega_2)$……等等。平面 $\Phi(\Phi_2)$ 与曲面交于圆 $l(l_1, l_2)$，而与平面 Θ 交于平面 Θ 上的水平线 $h(h_1, h_2)$，并且 $h_1 \equiv a_1$，而 $h_2 \equiv \Phi_2$。在这些线的水平投影相交处便找到点 A_1 和 B_1，然后作出对应的正面投影 A_2 和 B_2。

这样，我们得到了属于所求交线的点 $A(A_1, A_2)$ 和 $B(B_1, B_2)$ 的投影。同样地作出其余的点。将这些点的正面投影用光滑的曲线连起来，就得到交线的正面投影。

解题的第三步（也是最后一步）是标出所求的点 $X(X_1, X_2)$ 和 $Y(Y_1, Y_2)$ 的投影。

应该指出，不一定要选择投射面作为辅助平面。

设某一柱面由导线 $q(q_1, q_2)$ 及两条母线 $m(m_1, m_2)$ 和 $n(n_1, n_2)$ 给定，并给出一任意直线 $PQ(P_1Q_1, P_2Q_2)$（图 333）。求它们的交点（在本情况下只有一点）。如果开始解题时，过直线 PQ 引投射面作为辅助平面，则显然要找出平面与曲面的曲线形状的交线。无疑，用这样的方法能得到解，但不作出所述的交线也能解题，而且更简单、更准确。

过直线 PQ 引一平行于柱面母线的平面，并作这平面的水平迹线。为此，从点 $P(P_1, P_2)$ 和 $Q(Q_1, Q_2)$ 引平行于曲面母线的直线，并找出它们的水平迹点 $P'(P'_1, P'_2)$ 和 $Q'(Q'_1, Q'_2)$。标出曲面的迹线 $q(q_1, q_2)$ 与辅助平面的迹线 $P'Q'(P'_1Q'_1, P'_2Q'_2)$ 的交点 $X'(X'_1, X'_2)$。通过这个点的母线就是曲面与平面的交线。在图上标出这条母线后，在它与已知直线相交处便找到点 $X(X_1, X_2)$。点 $X(X_1, X_2)$ 即为所求，因为它既属于曲面，也属于直线 PQ。在图 333 上这种作法还可解释为用辅助投射法求解。

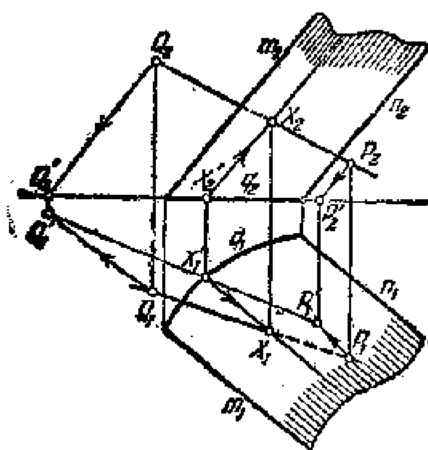


图 333

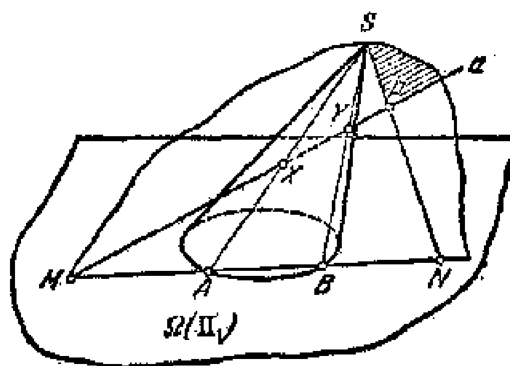


图 334

2. 试研究几个典型例子的解法。

例 1　求一般位置直线与任意形状的锥面的交点（图 334）。

首先利用直观图来阐明这个问题在空间的解法。设有任意锥面 S（其导线为任意曲线）和直线 a。过直线 a 和顶点 S 引一平面作为辅助平面。这个平面是过直线 a 的所有平面中的一个，与锥

面沿母线相交。在锥底所在的平面（用 Ω 表示）上找出辅助平面的迹线。这个底面一般可以处于任意的位置，而在特殊情况下为等距面或固定的投影面，例如 Π_1。在图 334 中，辅助平面在平面 Ω 上的迹线由点 M 和 N 确定（点 M 是直线 a 的迹点，点 N 是辅助平面上的任意直线 SP 的迹点）。下一步标出所得的迹线与锥底轮廓线的交点 A 和 B，并过这两个点引锥面的两条母线，辅助平面即沿这两条母线与锥面相交。在这两条母线上标出与已知直线 a 的交点 X 和 Y。图 335 在复合图上作出本题的解。

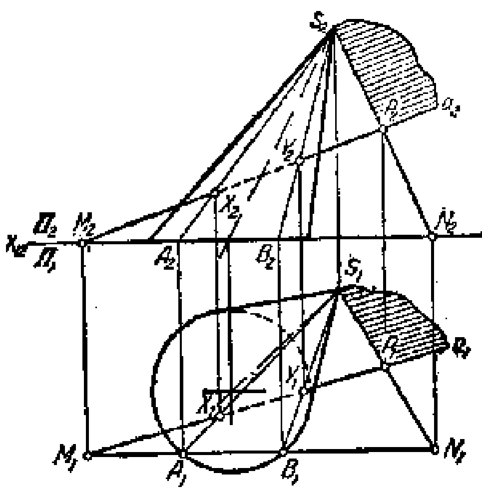


图 335

例 2 设已知一截圆锥，其顶点的正面投影不在图纸范围之内。求作直线 a 与圆锥的交点。

引两个与圆锥相切的正面投射面 $\Sigma(\Sigma_2)$ 和 $\Theta(\Theta_2)$（图 336）。

标出已知直线 $a(a_1, a_2)$ 与平面 Σ 和 Θ 的交点 $L(L_1, L_2)$ 和 $T(T_1, T_2)$。引直线 S_1L_1 和 S_1T_1，这两条直线将看作是过锥顶的直线 SL 和 ST 的水平投影。

因为直线 SL 和 ST 在平面 Σ 和 Θ 上，所以它们的水平迹点应当在这两个平面的水平迹线 $m(m_1, m_2)$ 和 $n(n_1, n_2)$ 上。注意到这一点，我们便标出在圆锥底平面上的迹点 $M(M_1, M_2)$ 和 $N(N_1, N_2)$。用直线连接迹点 M 和 N，得到辅助平面的水平迹线 $MN(M_1N_1, M_2N_2)$，这个辅助平面是通过直线 $a(a_1, a_2)$ 和在图纸之外的锥顶 $S(S_2)$ 的。在该平面的迹线与锥底(迹线)相交处标出点 $A(A_1, A_2)$ 和 $B(B_1, B_2)$，并通过这两个点作出两条圆锥母线，在这两条母线上即找到所求的点 $X(X_1, X_2)$ 和 $Y(Y_1, Y_2)$。

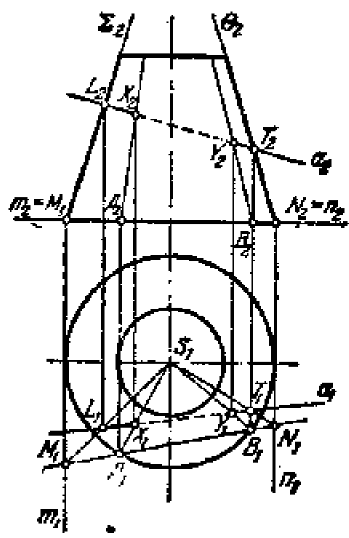


图 336

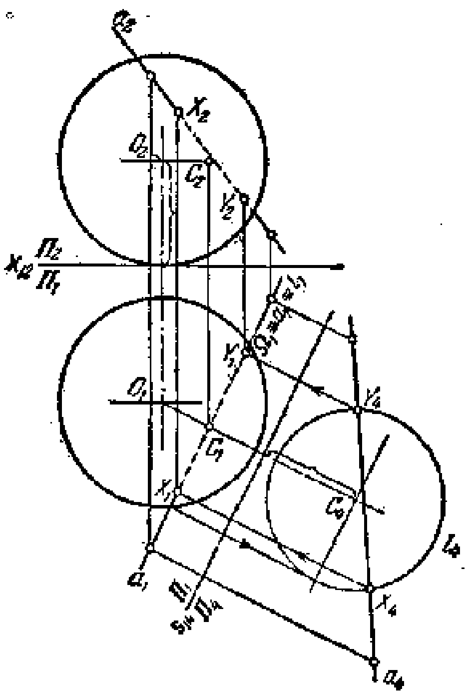


图 337

例 3 求直线 a 与球面的交点(图 337)。

与球面相交的直线 $a(a_1, a_2)$ 对投影面 Π_1、Π_2 处于一般位置，通过它作一辅助投射面。设这

个辅助投射面为水平投射面 $\Omega(\Omega_1)$。

引入平行于平面 Ω 的新投影面 $\Pi_4(s_{14}/\!/\Omega_1)$，并在这个平面上作出直线的投影 a_4 以及已知球面与平面 Ω 相交而得的圆的投影。

在投影面 Π_4 上找出所求的点的投影 X_4 和 Y_4。随后求出投影(X_1, X_2)和(Y_1 和 Y_2)，如图所示。

复 习 题

1. 求平面与曲面的交线上的点的一般方法是怎样的？
2. 在平面与曲面的交线上，哪些点称为特殊点？又哪些点称为一般点？
3. 怎样在任意形状的锥面与平面相交而得的曲线上找出最高点和最低点？
4. 在什么条件下可在圆锥截线中得到椭圆、抛物线和双曲线？
5. 怎样根据无穷远点的数量来区分椭圆、抛物线和双曲线？
6. 试证明当旋转锥面与平行于锥面上的两条母线的平面相交时得到的是双曲线？
7. 求直线与曲面的交点的一般方法是怎样的？
8. 为了求直线与锥面(柱面)的交点，必须包含直线作怎样的辅助平面？

练 习 题

1. 求三棱锥 $SABC$ 与由点 $M(M_1, M_2)$ 和直线 $h(h_1, h_2)$ 确定的平面的截面的投影(图 338)，并求截面的实形。

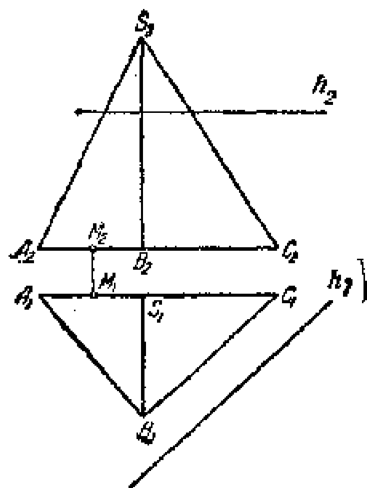


图 338

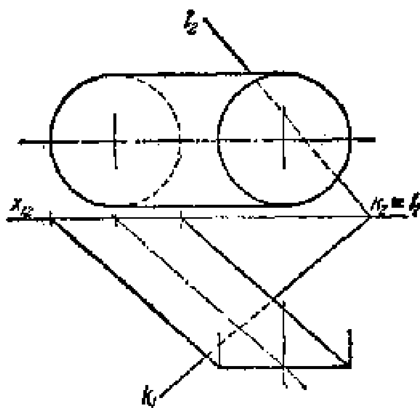


图 339

2. 求一般位置平面 $\Theta(k\times l)$ 与椭圆柱面的截面的投影(图 339)。
3. 求正面投射面 $\Sigma(\Sigma_2)$ 与正螺旋面的截交线的水平投影(螺旋面是右旋的)。
4. 求图上所示的带孔旋转锥面的水平投影和侧面投影(图 340)。

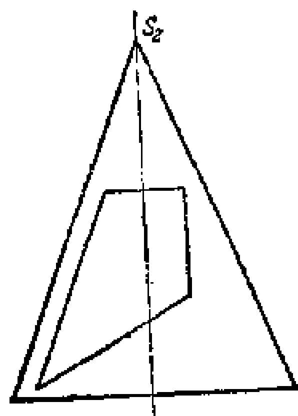


图 340

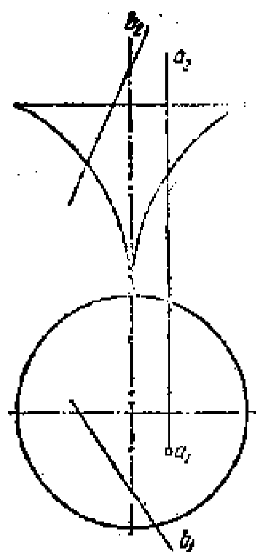


图 341

5. 在旋转锥面上选取一个任意点 $A(A_1, A_2)$。求作一平面，使此平面与锥面相截，其截线是以点 $A(A_1, A_2)$ 为顶点的抛物线。

6. 求水平投射线 $a(a_1, a_2)$ 和一般位置直线 $b(b_1, b_2)$ 与旋转曲面的交点(图 341)。

7. 求一般位置直线 $b(b_1, b_2)$ 与旋转锥面的交点。锥面的轴线是正平线，对水平面的倾斜角 $\alpha=45°$。

第十章 表面相交

§1. 曲面与多棱面相交

1. 多棱面由一些平面组成。由此可知，曲面与多棱面相交的问题实质上可归结为曲面与平面相交这一更为简单的问题。

十分明显，解后一问题所需重复的次数，等于多棱面与曲面相交时参与相交的棱面数。

如果取任意一个棱面所在的整个平面来代替该棱面，则得到一条完整的交线。但是因为棱面只是平面上由直线(多棱面的棱边)围成的部分，所以既可能得到一条完整的交线，也可能得到交线的一些个别部分(一部分或几部分)，称为曲面与多棱面交线的段。

不难看出，段的端点是多棱面的棱边与曲面的交点。这些点属于所研究曲面的交线上重要的特殊点。这些点的求法与解直线与曲面相交问题有关。在许多曲面上，这些特殊点可以比较简单地求出，而在某些曲面上，它们只能借助于非圆曲线求出，且这曲线就是曲面与包含已知直线的平面的交线。

在这种复杂情况下，这些点通常不必专门作出，这时它们是作为相邻两棱面上的段的交点而作出的，但准确性差一些。

因此，曲面与多棱面的交线的作图问题，在一般情况下，归结为下列两个问题：曲面与平面相交和曲面与直线相交。

2. 我们来研究几个例子。

例1 在投影面体系(Π_1, Π_2)中给出球面$O(O_1, O_2)$和三棱柱$I\ II\ III(I_1\ II_1\ III_1, I_2\ II_2\ III_2)$，求作它们的交线(图342)。

显然，在这种情况下，交线将由一些圆或圆弧组成，这些圆或圆弧是球面被棱柱的每一个棱面所截得的交线。

棱面$I\ III$和$II\ III$在体系Π_1、Π_2里处于特殊位置，因此可以非常简单地作出它们与球面的交线(圆)的投影，我们不再讨论。

现在来说明棱面$I\ II$截得的那个圆的投影的作法。为了使作图更加准确和清楚，引入新的投影面Π_4，使它垂直于平面Π_2和棱柱的侧棱边。

这时在平面体系Π_2、Π_4中，棱柱的侧棱边和棱面在Π_4上投射为直线和平面。这就有可能立即在平面Π_4上求出球面与棱面或扩展后的棱面相交而得到的圆的直径。

在作棱面$I\ II$的交线的投影时，先作圆心的投影。

从点O_4向I_4II_4作垂线，并标出圆心的一个投影点V_4。因为O_4V_4是连接球心和圆心的线段OV的实长，所以该线段在平面Π_2上的投影O_2V_2应平行于轴s_{24}。

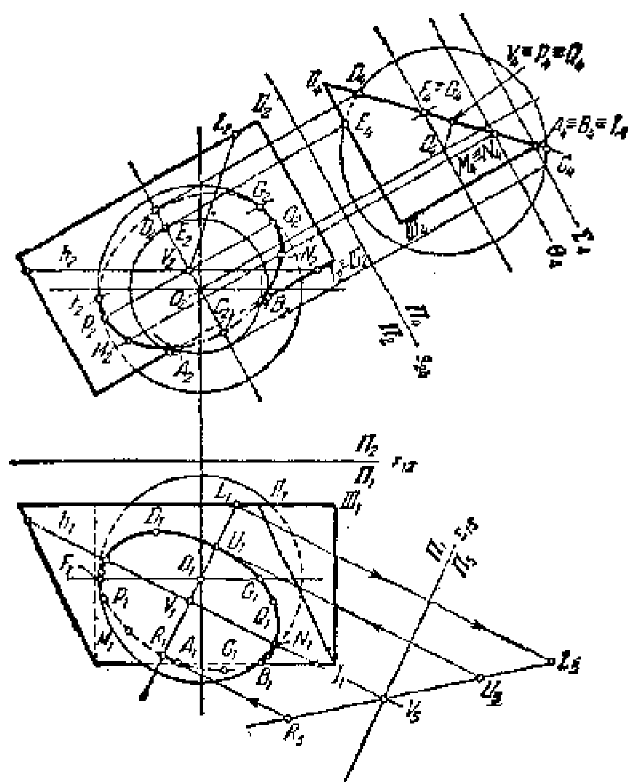


图 342

注意到这些就可作出 V_2，然后再作出 V_1。此后就可以作出表示圆截线投影的椭圆的轴线。

在平面 Π_2 上，线段 P_2Q_2 和 C_2D_2 是椭圆的轴线，这些线段的位置和长度不难根据图来确定 $(P_2Q_2=C_4D_4)$。在平面 Π_1 上先找出以 V_1 为中心的椭圆的轴线方向。长轴的方向即棱面 I II 上水平线 h 的投影 h_1 的方向，它的长度也等于 C_4D_4。短轴的方向（与长轴方向垂直）及其长度，可将位于圆所在平面的坡线上那一条直径投射而求得。

直线 V_1L_1 就是所求坡线的水平投影。

现在求坡线线段 VL 的实长。为此，引入平行于 VL 的新投影面 Π_5。线段 V_5L_5 就是 VL 的实长。沿该线段的方向从点 V_5 向两边截取被投射的圆的半径，等于线段 C_4D_4 的一半，再根据所得的点 U_5 和 R_5 作出确定短轴的两个端点 U_1 和 R_1。

我们来作特殊点和中间点。

先标出对平面 Π_2 的可见性点的投影 $F_4\equiv G_4$，然后找出对应的投影 F_2、G_2 和 F_1、G_1。

为了找出在侧棱边 $I(I_4)$ 上的点，过这条棱边作辅助平面 Σ。这个平面与球面交于一个圆，这个圆投射到平面 Π_2 上不变形，同时这个圆与棱边的投影交于两个点 A_2 和 B_2。点 $A(A_1, A_2)$ 和 $B(B_1, B_2)$ 就是棱边 I 的交点。

求一般点 M 和 N 所用的方法与求点 A 和 B 相同，只是采用任意的辅助等距面 Θ 而已。

这样作出任意多个一般点，然后用光滑的曲线将它们的同名投影和特殊点的相应投影连成椭圆。

例 2 求作旋转锥面与三棱柱的交线(图 343)。

先求棱柱的侧棱边 $BN(B_1N_1,\ B_2N_2)$ 与锥面的交点。为此，包含这条棱边作一个通过锥顶 $S(S_1,\ S_2)$ 的辅助平面。这个平面在图上可以看作是由棱边 BN 和与 BN 平行且通过锥顶的直线 $SR(S_1R_1, S_2R_2)$ 给定的。

引入与 Π_2 和棱柱的侧棱边垂直的新投影面 Π_4。在这个平面上作出棱柱的投影和锥顶 S 的投影，即三角形 $A_4B_4C_4$ 和点 S_4。

因为辅助平面($BN \parallel SR$)垂直于 Π_4，所以它的迹线在该平面上的投影通过点 S_4 和 B_4。

用 $m(m_1, m_2)$ 表示平面 Π_4 在平面 Π_1 上的迹线，当平面 Π_4 重合后，该迹线的位置用 m_4 表示。在 m_4 上标出点 L_4，再在 m_1 和 m_2 上找出这个点的对应投影 L_1 和 L_2。

辅助平面的水平迹线通过点 $R(R_1, R_2)$ 和 $L(L_1,\ L_2)$，这迹线的投影就是 R_1L_1 和 R_2L_2。在该迹线与锥底的相交处得到点 $P(P_1, P_2)$，利用这个点可得出锥面与辅助平面相交的那条母线。

母线 $SP(S_1P_1, S_2P_2)$ 与棱边 $BN(B_1N_1,\ B_2N_2)$ 相交，给出所求的棱边 BN 与锥面的交点。

其它两条侧棱边的交点可用同一方法求得。

每一个棱面与锥面的交线上的一般点可利用一些辅助平面作出，每一个辅助平面通过锥顶和棱面上平行于侧棱边的任意一条直线。这样的直线在平面 Π_4 上投射为一个点。这个点可以作为作图的一个始点，就象刚才讨论过的作图以 B_4 作为始点一样。

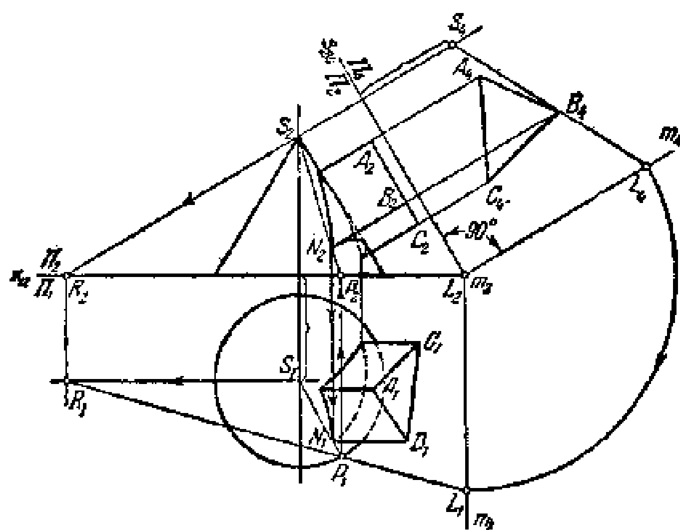


图 343

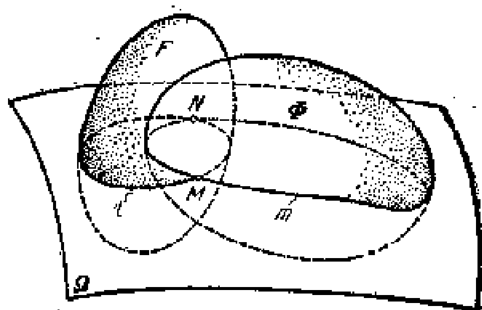


图 344

§2. 两曲面相交

1. 在画法几何中，两个曲面的交线可利用辅助截面法求得。

这个方法的实质如下。假设已知两个任意曲面 F 和 Φ。求作它们的交线，即确定属于它们的交线的点(图 344)。

为了求出这些点，应当用某个辅助面 Ω 来截已知曲面。这个辅助面的形状和相对于已知曲面的位置应当这样来选择，使截线的形状最简单(直线、圆)，并使这些线的投影在复合图上不难

作出。

总之，应当使辅助面Ω与每一个已知曲面相交，而把这些交线作为辅助线：

$$l=\Omega\times F,$$

$$m=\Omega\times\Phi。$$

然后标出所得的线的交点（如果位在曲面Ω上的这些线相交的话）：

$$M=l\times m,$$

$$N=l\times m\text{ 等等。}$$

所得的点当然属于F和Φ（以及Ω），因而它们属于所求的两已知曲面的交线。

用不同的辅助面（即使只是位置不同）重复这个作法，能够求出曲线上许多的点，可用曲线板足够准确地通过这些点画出曲线。

应该注意，在本书的前面一些章里，在解各种相交问题（例如，求直线与平面的交点，两平面相交，平面与曲面相交和直线与曲面相交）时，我们已经不止一次地应用过上述的辅助截面法。

在所有这些问题里，为了解题都引入了辅助平面。因为平面是曲面的特殊形式，所以可以认为正在研究的这种方法过去在最简单的特殊情况下就已利用过了。当时辅助截平面的作用在于使上述四个问题中的每一个都转化成位在一个辅助平面上的两条线的相交问题。现在辅助面也具有同样的作用：使两个曲面的相交问题转化成更为简单的、位在一个辅助面上的两条线的相交问题。

2. 经验证明，在解曲面相交问题中最常选用平面或球面作为辅助面。

因此，通常将一般方法又分为两个方法，即辅助平面法和辅助球面法。应用哪一种方法较好要根据所给曲面的形状而定。

在研究这些方法之前，我们先指出它们的两个共同特点。两曲面的交线和平面与曲面的交线一样，所有的点可区分为特殊点和一般点（或普通点）[①]。

作交线时应先定出其特殊点。这些特殊点几乎总会使我们看出：求一般点用的辅助截面的位置应当在哪一范围内变化。

如果已知曲面在原投影面体系（Π_1,Π_2）中处于一般位置，为了便于解题，最好把图形交换，使它处于特殊位置。

§3. 辅助平行平面法

1. 当辅助平行平面截割每一个已知曲面都给出直线或圆的交线时，就用这个方法来求两曲面交线上的点。

例1 求作轴线交叉成90°角的两个圆柱面的交线（图345）。

解本题时，可选用n个在空间处于不同位置的辅助平面。例如，可选用水平等距面，每一个

---

① 参看第九章§1之1。

等距面与直立圆柱相交于一个圆，而与水平圆柱相交于直母线。但也可选用正平面，它与两个圆柱都相交于母线。设用正平面为辅助平面。

引入平面 Π_3，在这个平面上作出水平圆柱的投影。然后作 A、B、C、D、E、F等特殊点的投影。点A和B在水平圆柱最前面的一条母线上。在这条母线的水平投影上标出点A和B的水平投影A_1和B_1，并据此而找到正面投影A_2和B_2。点C、D和C'、D'位在水平圆柱最上面和最下面的母线上。在这两条母线的水平投影上标出它们的水平投影$C_1\equiv C'_1$和$D_1\equiv D'_1$，并根据它们找出对应的正面投影C_2、C_2'和D_2、D_2'。现在来求在直立圆柱最左和最右的母线上的点E、E'和F、F'。为此，引入与直立圆柱交于这两条母线的辅助正平面$\Sigma(\Sigma_1)$，并求出水平圆柱的对应母线。在平面Π_3上，这两条对应母线的投影为点$E_3\equiv F_3$和$E'_3\equiv F'_3$。然后，求出这两条母线的正面投影(在图上未表示出来)，这些投影与直立圆柱的边界母线的投影相交，得到点E_2、F_2和E'_2、F'_2。这样就确定了点E、F和E'、F'。

点G和G'同样可利用辅助平面$\Theta(\Theta_1)$确定。除了特殊点外，图上还表明怎样作出四个一般点M、M'、N、N'。完全和其它的点利用Σ和Θ作出的那样，它们都是利用辅助平面$\Gamma(\Gamma_1)$求得的。

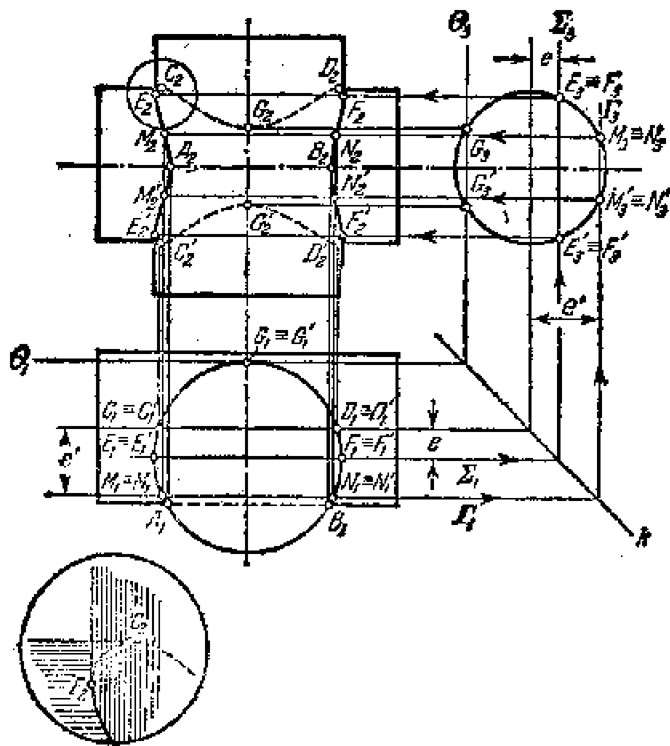


图 345

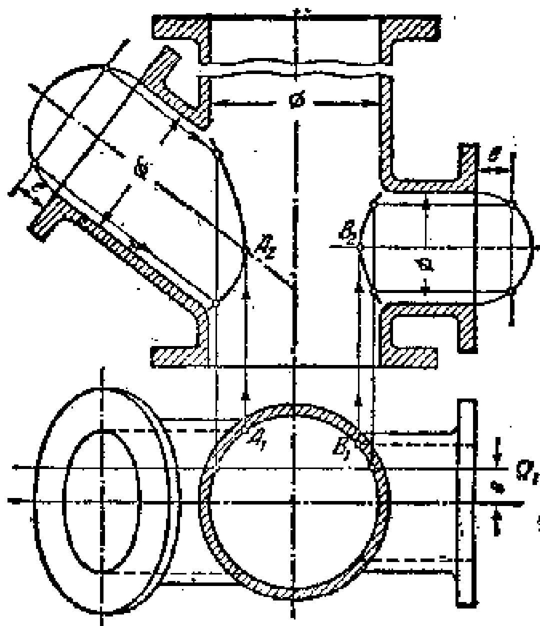


图 346

图 346 所示为求轴线相交的两个圆柱面的交线的实际例子①。

① 在工程图中，交线常常是按规定画法画出，并称为过渡线。在图上过渡线不画到头(参看图 346)。

例 2　求作圆锥面与球面的交线(图 347)。

应该注意，这两个形体有一个公共对称平面，它通过圆锥面的对称轴线和球面的对称中心。这个对称平面用$\Sigma(\Sigma_1)$表示。

引入平行于Σ的新投影面Π_4，并在Π_4上作出已知形体的投影。在平面体系(Π_1, Π_4)中，这些形体对投影面处于最简单的位置。先在这体系中解题，此后在平面Π_2上作交线的投影就容易了。

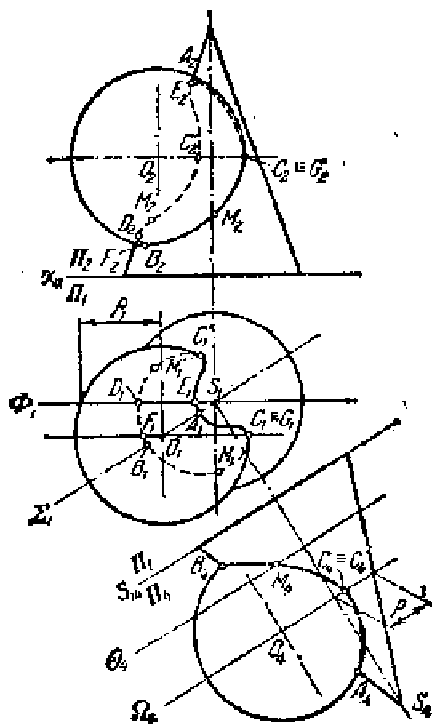
我们先作特殊点。

标出交线上对投影面Π_1的最高点和最低点——点$A(A_4)$和$B(B_4)$，并求出它们的投影A_1和B_1。

现在来求在球面赤道圆上的点$C(C_1, C_4)$和$C'(C_1', C_4')$。因为这些点在球面的水平投影的外形线上，所以它们是可见性点。为了求这些点，可通过球面的赤道圆引辅助水平面$\Omega(\Omega_4)$。注意到这个平面与圆锥面交于半径为ρ的圆而与球面交于赤道圆，就可作出这两个圆的水平投影的交点而得到点C_1和C_1'。然后作出投影C_4和C_4'，可见性点就找到了。随后可以利用辅助水平面找出必需数量的一般点，其中一个平面$\Theta(\Theta_4)$已表示在图上。在平面Π_1和Π_4上作出交线的投影后，就可作出它们在Π_2上的投影。

再来求在圆锥面最左边的母线上的特殊点$D(D_1, D_2)$和$E(E_1, E_2)$。为此引入通过该母线的辅助正平面$\Phi(\Phi_1)$。平面$\Phi(\Phi_1)$与球面交于半径为ρ_1的圆。用这半径作出该圆的正面投影(在图上只画出它的两段圆弧)便得到它与母线的交点D_2和E_2。再根据它们求出D_1和E_1。

还必须标出两个重要的特殊点$F(F_1, F_2)$和$G(G_1, G_2)$，因为这是交线的正面投影的可见性


图 347

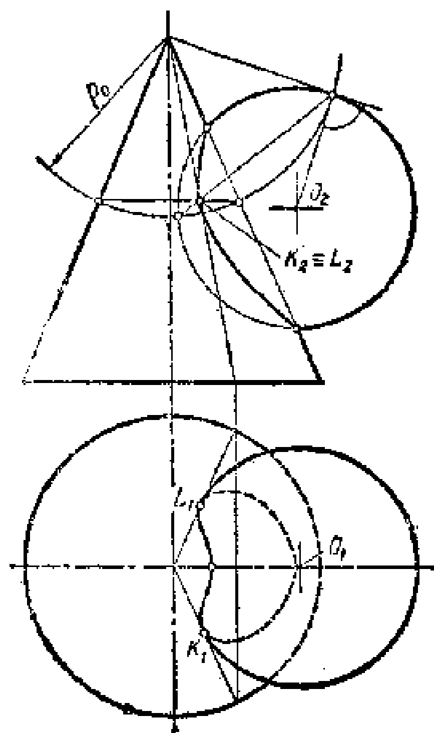


图 348

点。这两点在球面的主子午线上，它们只能近似地作出。首先标出它们的水平投影 F_1 和 G_1 即所求曲线的水平投影与球面主子午线的投影的交点，然后求出对应的正面投影F_2和G_2。

如果锥面不是整个穿入球面，而只是部分地穿入球面，则还可以指出交线上的两个具有特征的点，这两个点是交线与锥面母线的切点，因而这些母线的投影与交线的投影也相切。

在图 348 上，这两个点用 $K(K_2)$和$L(L_2)$表示。它们是利用半径为 ρ_0 的辅助球面作出的，从图上不难看清楚其作法①。

一般点在平面 Π_2 上的投影可根据它们在平面 Π_1 和 Π_4 上的投影作出。

2. 图 349 所示为利用辅助平行平面法作机器零件上的某些交线的例子。

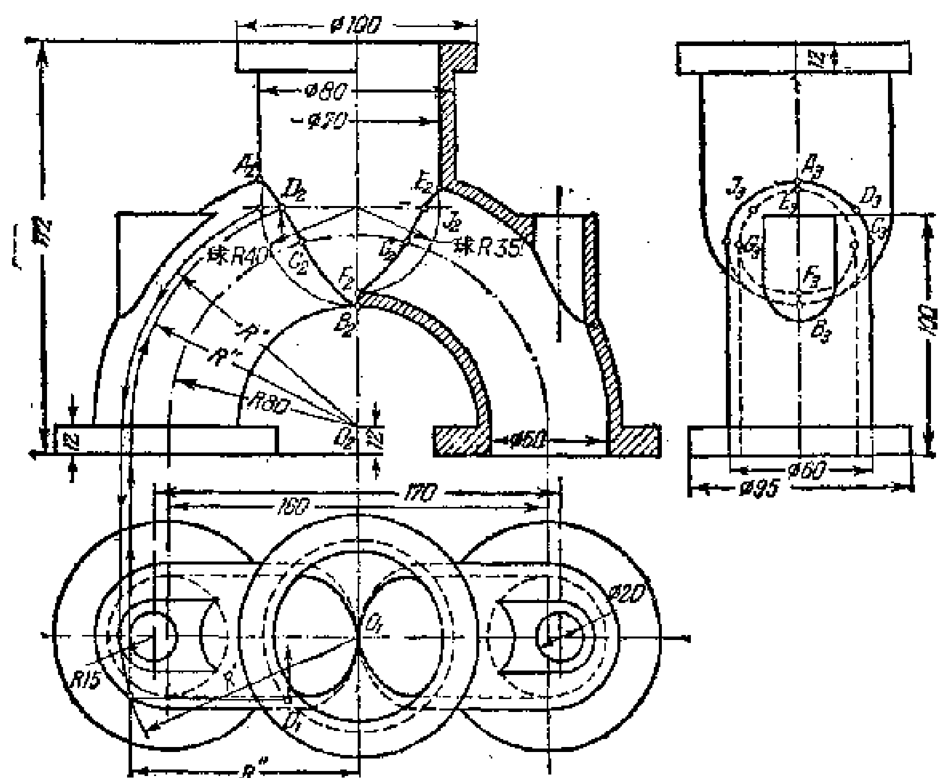


图 349

这个零件的主要外表面由具有尺寸$R=80$和$\phi=60$的圆环面、$\phi=80$的圆柱面和半径$R=40$的球面组成。

交线上象 $A(A_2, A_3)$和 $B(B_2, B_3)$这种特殊点可直接标出，不需专门作图。

点$C(C_2, C_3)$是利用与圆环面相切的辅助正平面找到的。这时，该平面和圆环面的切线为一个圆，圆的正面投影与圆环面轴线的正面投影重合。

切面与球面（$R=40$）相交于一个圆，其半径可由切面与球面的水平投影或侧面投影来确定。

特殊点 $D(D_2、D_3)$是圆环面、圆柱面和球面所有三个曲面的交点。

① 参看本章§5。

为确定点D，只要作出球面的赤道圆与圆环面的交点。为此，从圆环面的中心$O(O_1, O_2)$作一个半径为R'的辅助球面。在这球面上找到它的$R=40$的赤道圆，此外，还找到球面R'与圆环面相交于半径为R''的圆（半径R''的作法在图上用箭头表示）。

在圆R''与赤道圆相交处得到点$D(D_1, D_2, D_3)$。交线$AB(A_2B_2)$被点$D(D_2)$分为两部分，其中$AD(A_2D_2)$部分为圆环面与圆柱面的交线，而$DB(D_2B_2)$部分是圆环面与球面的交线。此后，引入辅助正平面，即可找出交线的一般点。每一个辅助平面与给出的曲面相交于简单的线（圆，直线），在这些线的相交处就找到所求的一般点。

零件内表面的交线EF可用类似交线AB的方法作出。

§4. 转动平面法

1．转动平面法用来求任意形状的柱面和锥面（包括旋转柱面和旋转锥面）的交线。

这两类曲面的相交可有三种不同的组合。

例1 求作任意形状和任意位置的两个锥面S和T的交线（图350）。

选取一个通过曲面顶点S和T的辅助平面Φ。如果平面Φ与两个曲面都相交，则截线显然就是锥面的母线。这些母线是同一平面上的直线，因此在一般情况下它们是相交的，交点I、II、III、IV属于两个已知曲面，因而也属于所求的交线。但平面Φ也可能与一个，或者甚至与两个曲面相切。这时得到的就不是四个点而是两个点或一个点，而且这些点都是特殊点。平面Φ的作法如下，先在直观图上进行，然后再在复合投影图上进行。用一个任意平面Ω截曲面，并作出（或给出）这些曲面在该平面上的迹线。然后求出直线ST在同一平面Ω上的迹点R。过点R引任意直线n与已知曲面的迹线相交，直线n与直线ST一起确定辅助平面Φ，而且就是Φ在平面Ω上的迹线。其次再标出迹线n与两曲面迹线的交点并过这些点引曲面的母线。以后就可以找出所求的点I、II、III、IV。

因为直线n可以在角$n'n''$的范围内从n'逐渐转移到n''，平面Φ也就相应地绕直线ST而转动，因此这个方法可称为转动平面法。

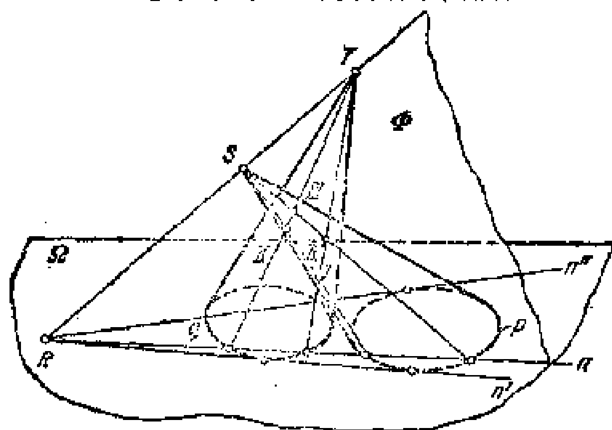


图 350

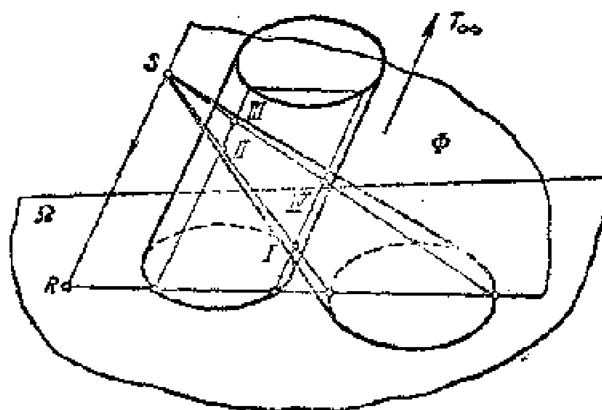


图 351

例2 求作一般位置的柱面与锥面的交线。

在这种情况下，解法的实质与上一个例子类似。这可以从下面的讨论中看出。

设一个锥面的顶点T沿某一选定的方向移向无穷远(图351)，这个曲面就变为柱面。它的母线平行于顶点T_∞移动的选定方向。如果现在连接顶点S和T_∞，就得到平行于柱面母线的直线SR。所有通过直线SR且与两已知曲面相交的平面Φ，都与已知曲面沿母线相交。

因此，在这种情况下，所引的辅助平面必须通过锥面的顶点并平行于柱面的母线。其余的作图步骤可照上例所说的那样完成。

例 3　求作两个柱面的交线(图352)。

这种情况可以看作是例1的变形。这时应当假想给出的两个柱面是由两个锥面当其顶点沿着平行于已知曲面的母线方向移到无穷远时变成的。现在，连接无穷远的"顶点"S_∞和T_∞的直线，其本身就是无穷远直线，因而所有通过该直线的辅助平面Φ就互相平行。同时，这些平面也平行于S_∞和T_∞的方向，也就是说也平行于两柱面的母线。如果在空间取一任意点V，并通过它引两条平行于母线的直线，则这两条直线确定一个平面，任何辅助面Φ都应与它平行。

这些互相平行的辅助平面可以看作是绕着一条无穷远的直线而转动。

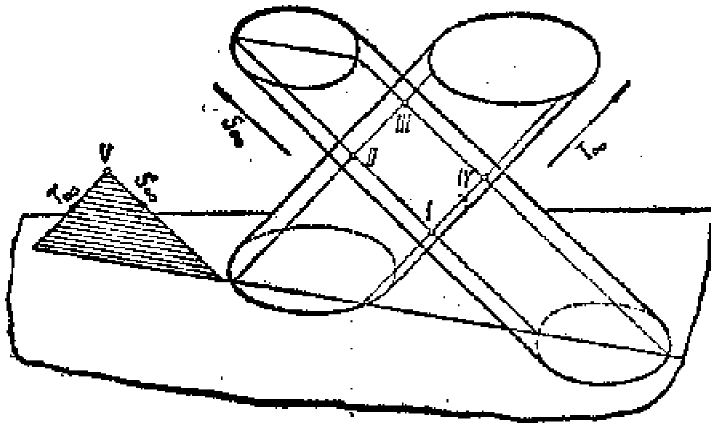


图 352

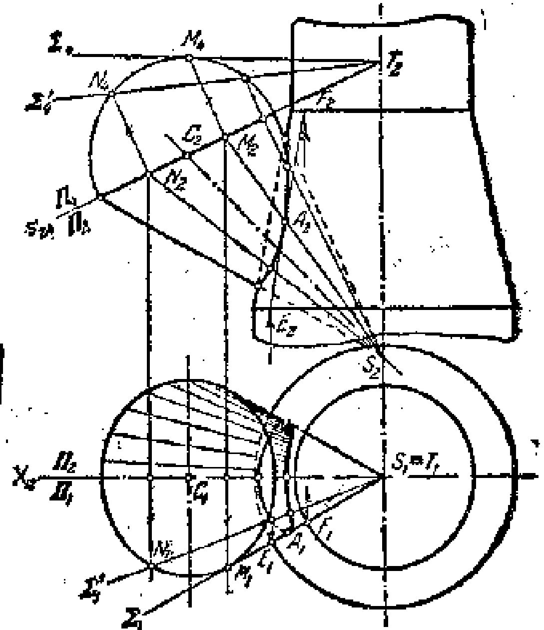


图 353

例 4　求作椭圆锥面与旋转锥面的交线，前者的顶点$S(S_1, S_2)$位在后者的轴线上。椭圆锥面可以看作是由它的顶点$S(S_1, S_2)$和圆心为$C(C_1, C_2)$的底圆给定(图353)。

本例可以看作是一个求煤气发生器的锥形加料漏斗与其外壳的交线的问题。锥形漏斗应满足的条件之一是它的盖子为圆形的。

交线可以利用辅助转动平面作出。这个平面通过两个锥面的顶点，在本情况下应当通过旋转锥面的轴线。应该注意，整个发生器具有一个正平面的对称平面，因此只要作出半个图形的解就够了。我们取该对称平面作为投影面Π_2。引入新投影面$\Pi_4 \perp \Pi_2$，使Π_4通过椭圆锥面的底圆。标出Π_4与旋转锥面轴线的交点$T(T_1, T_2)$。在放倒后的投影面Π_4上作出半个底圆，然后引辅助转动平面的迹线Σ_4、Σ_4'等等。在位置Σ_4，平面与椭圆锥面相切于由点$M(M_4, M_2, M_1)$和$S(S_1, S_2)$所确定的母线。作出水平迹线Σ_1，如图所示，我们就得到位在平面Σ

上的旋转锥面母线 $EF(E_1F_1, E_2F_2)$。此后，求出点 $A(A_1, A_2)$ 的投影。这是交线上的一个特殊点。

对一般点也可以用类似的方法，利用辅助平面的其它位置（Σ^1、Σ^2……）作出。

例5 给出两个具有交叉轴线的圆锥面$S(S_1, S_2)$和$T(T_1, T_2)$（图354）。求作交线的投影。

先找出位于曲面外形母线上的特殊点。

过正面投影的外形母线引正平面$\Omega(\Omega_1)$。这个平面与锥面T交于一个圆，这个圆的水平投影是Ω_1上的一直线段，而正面投影为同样大小的圆。

这个圆与锥面S最右边母线的投影相交，得到两个点$A(A_1, A_2)$和$B(B_1, B_2)$。同样，利用水平面$\Theta(\Theta_2)$找出点$C(C_1, C_2)$和$D(D_1, D_2)$。如果用辅助转动平面Φ来截曲面，我们就得到交线上的一般点。要在某一任意位置引平面Φ，必须先找出直线ST在两个锥面底平面上的迹点，在本情况下，这两个底面已分别用作投影面Π_1和Π_2，直线ST在这两个平面上的迹点就是点$R(R_1, R_2)$和$N(N_1, N_2)$。

过点$R(R_1, R_2)$可在平面Π_1上引任意直线RL (R_1L_1, R_2L_2)，并应把它作为平面Φ的水平迹线。这时直线LN (L_1N_1, L_2N_2)就是平面Φ的正面迹线。然后找出平面Φ与每一个锥面相交的母线，在这些母线的相交处，就得到所求交线上的点I、II、III、IV。

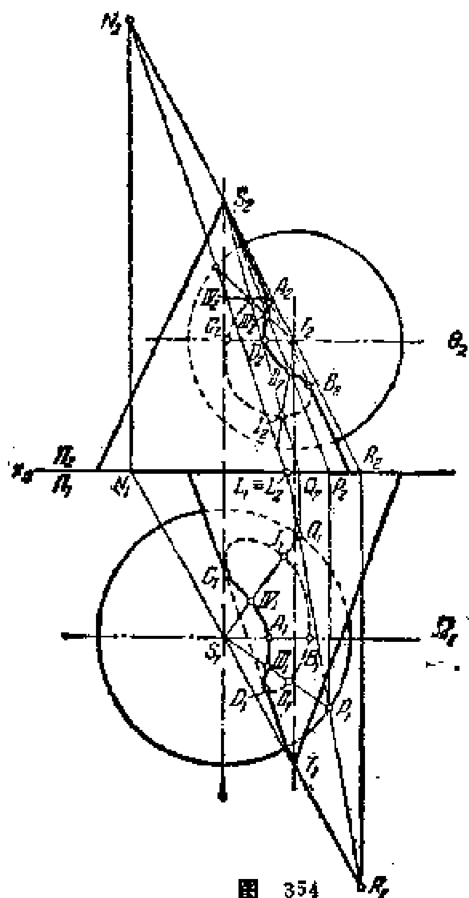


图 354

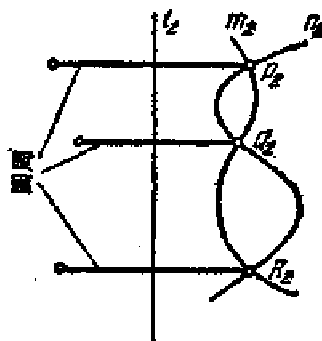


图 355

§5. 辅助球面法

1. 我们先讨论在什么情况下可选择同心球面作为辅助面。

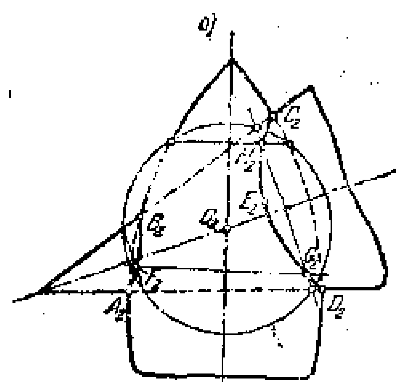
当两个任意形状的旋转曲面的轴线相交时，就可以用这个方法来求它们的交线。为了解题方便，轴线应平行于投影面。

在讨论这个方法之前，我们先谈两个旋转曲面相交的一种特殊情况。

假定两个旋转曲面具有公共的轴线，即它们是共轴的。在这种情况下，它们将相交于一些圆周，圆周的数目等于两个曲面子午线的交点数。

事实上，设两个曲面分别由子午线 $m(m_2)$ 和 $n(n_2)$ 绕公共的轴线 $i(i_2)$ 旋转而成(图355)。这时两子午线的公共点 $P(P_2)$、$Q(Q_2)$ 和 $R(R_2)$ 显然形成一些为两个已知曲面所共有的圆周，而圆周的数目等于两子午线的交点数。

假定某旋转曲面与球面相交，并且球心在该曲面的轴上。在这样的条件下，球面与曲面共轴，因而它们相交于一些圆周(图356)。球面的这一种性质，即当其中心位在旋转曲面的轴上时与曲面相交于一些圆周，是同心球面法的基础。



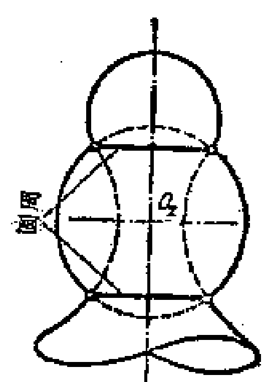


图 356

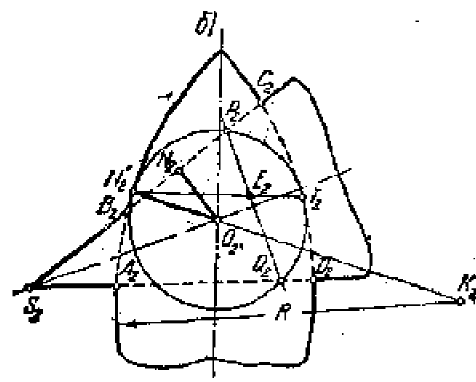


图 357

2. 设给出了两个轴线相交的旋转曲面在平面 Π_2 上的投影，轴线的交点用 $O(O_2)$ 表示(图357)。

以 $O(O_2)$ 为中心作一任意球面，它在图上用圆心为 O_2 的圆周表示。这个球面既与第一个曲面共轴，又与第二个曲面共轴，因而与这两个曲面相交于一些圆周。在图上，这些圆周表现为直线段(图357, б)。在圆周相交处得到一些同时属于两个已知曲面的点，因此这些点属于所求的交线。这些点的投影就是圆周的投影的交点。改变辅助球面的半径，就可得到交线上任意多个点。

在作出那些表示任意球面的圆周之前，需要弄清楚适合于解题的最大球面半径和最小球面半径(在图上就是圆周的半径)。为此，必须标出两曲面外形母线的交点。从中心的投影 O_2 到离它最远的交点的投影(A_2 或 C_2)这段距离就是最大球面半径。为了确定最小球面半径，需要从点 O_2 (图357, б)向两曲面的外形母线引两条法线。标出法线与外形线的交点 N_2 和 N_2' 后，就在所得的这两条线段中选取一条较大的作为辅助球面的半径。如果选取小的，则有一个已知曲面不与这样小的球面相交。

这样，当两个旋转曲面的轴线相交，并且给出了这两个曲面在一个平面上的投影，而这个平面又是平行于曲面的轴线时，就可以应用同心球面法来作交线的投影。如果要作出这交线在另一个平面上的投影，则只要将交线上的每一个点跟这一个或另一个旋转曲面上的圆周连系起来，

就不难作出。

3. 下面举一些应用同心球面法作旋转曲面的交线的例子（图 358 和 359）。交线在这里分解为两段空间曲线，由于两相交曲面具有一个公共对称平面，因此这交线投射到对称平面（或平行于对称平面的平面）上成为二次曲线，在本情况下则为双曲线[①]。

求双曲线在曲面范围内那段弧上的点的方法，同样可以用来找出双曲线在曲面范围外的其余所有的点。例如，图 358 上的点 R_2 和 V_2。

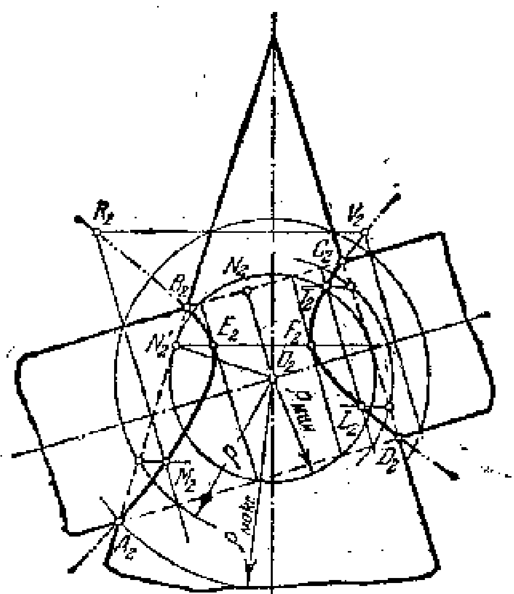


图 358

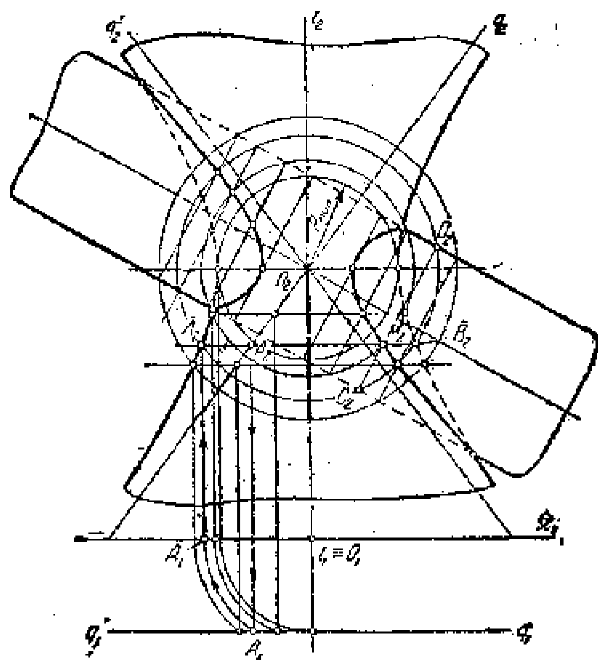


图 359

图 359 表示轴线相交的单叶旋转双曲面与旋转柱面的交线的作法。双曲面由轴 $i(i_1, i_2)$ 及不同族的直母线 $q(q_1, q_2)$ 和 $q'(q_1', q_2')$ 给定。

所引用的交线作法的特点，就是交线上的每一个一般点都与双曲面的外形线上的点同时作出[②]。

求一般点 $M(M_2)$，可这样进行。在母线 $q(q_1, q_2)$ 上取任意点 $A(A_1, A_2)$，然后使该点绕轴 i 旋转到主子午面 $\Omega(\Omega_1)$ 上。这个点在新位置的投影用 $\bar{A}_1$、$\bar{A}_2$ 表示。随后以半径 $OA(O_2\bar{A}_2)$ 作球面（在图上是作一个圆）。这个球面与双曲面交于投影为 $\bar{A}_2\bar{B}_2$ 的圆，而与柱面则交于表现为线段 C_2D_2 的圆。$\bar{A}_2\bar{B}_2$ 和 C_2D_2 相交就得到属于所求交线上的点 M_2。

4. 现在来研究变心球面法。

从这个方法的名称可知：它象上面的方法一样应用辅助球面，但球心是不同的。这个方法在曲面相交中用得比较少。

为了阐明这种方法的实质，我们先研究一个用前面所述的任何一种方法都不能解决的例子。

① 参看本章 § 8。

② 单独作旋转双曲面外形线的方法已在第七章 § 4 之 3 给出。

设要求作出圆锥面与球面的交线（图360）。圆锥面的轴线与球心在同一正平面上。由于任意两个球面都相交于一个圆，因此，如果我们取一个球心在锥轴上的任意辅助球面，它就与已知球面和已知圆锥面相交于两个圆。在这两个圆的相交处便得到两已知曲面交线上的点。为了作其余的点，可以再作球心在锥轴上但位置不同的其它辅助球面。这种解法称为变心球面法。

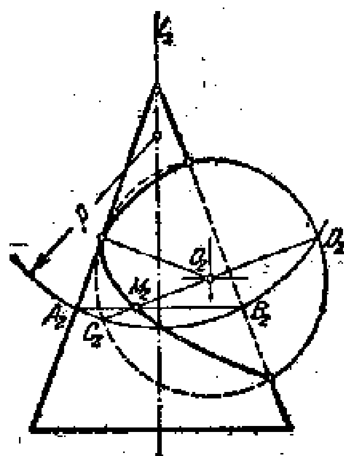


图 360

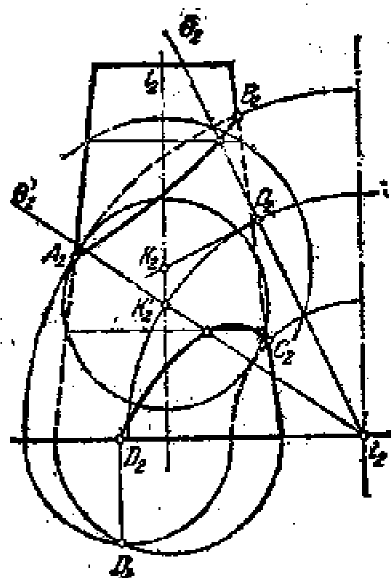


图 361

5. 我们来讨论几个例子。

例 1　求作圆锥面与圆环面的交线（图361）。锥轴$i(i_2)$位在圆环面中心圆所在的平面上，因此这两个曲面有一个公共对称平面，与圆环面中心圆所在的平面重合。我们先标出特殊点A_2、B_2、C_2、D_2。为了求一般点，过圆环面的轴线$l(l_2)$引辅助平面$\Theta(\Theta_2)$，这个平面是正面投射面，与圆环面交于一个圆，圆心的投影为点O_2。

从中心$O(O_2)$对该圆所在的平面作垂线，这条垂线显然就是圆环面中心圆的切线。标出此切线与锥轴的交点$K(K_2)$，并取点$K(K_2)$作为球心，作一个球面，使圆心为$O(O_2)$的圆位在这个球面上。要在图上画出这样的球面，应以K_2为圆心作一个圆，通过表示圆$O(O_2)$的那条线段的两个端点。所作的辅助球面与圆锥面交于圆，但该球面也通过圆心为$O(O_2)$的圆，因此它与圆环面也相交于一个圆。

所得的圆的交点同时属于圆锥面和圆环面，因此是它们交线上的点。

用同样方法采取新的辅助平面就可找出交线上足够数量的点。这时每次都要从不同的球心作辅助球面，但是这些球心必须在锥轴上。

例 2　在图362上画出了一段导管。它的表面是循环曲面。这个表面与圆柱管表面的交线是用变心球面法作出的。

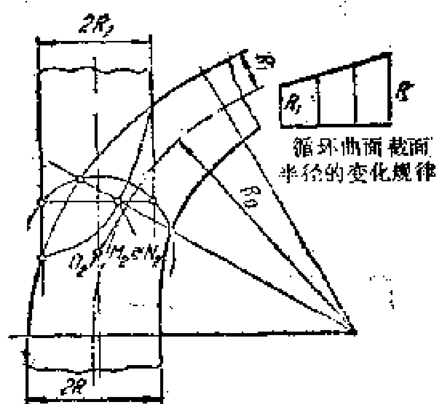


图 362

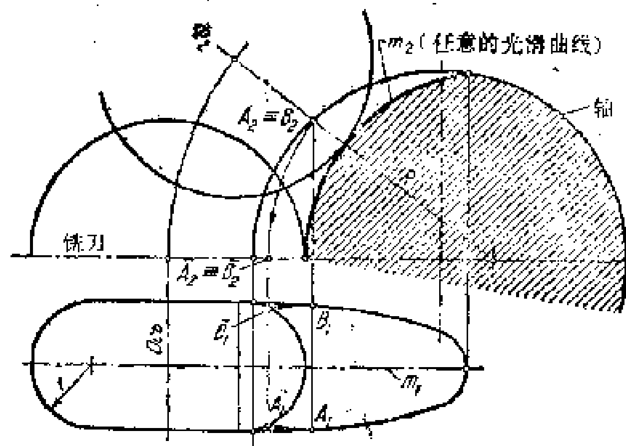


图 363

§6. 定曲面与动曲面的交线

用铣削方法生产表面形状复杂的机器零件时，常会遇到求两曲面(其中一个是变动着的)交线的几何问题。

我们来研究一个例子。设在一圆柱轴的表面上用给定尺寸和断面形状的铣刀加工一道横向(对圆柱轴线)的槽(图 363)。

设铣刀进入到轴内的可变深度由光滑的曲线 $m(m_1, m_2)$ 确定。这条曲线确定了刀具轴线的轨迹，更准确地说是确定了图上表示铣刀轴线的那个点的轨迹。

显然，所求的曲面交线的正面投影必与作为圆柱轴的正面投影的那个圆的一部分重合。

求该交线的水平投影，可进行如下。

观察一下铣刀在加工中的任一瞬间的位置，我们看到，铣刀切削刃的断面所在的平面 $\Phi(\Phi_2)$ 总是通过刀具轴线和刀具与 $m(m_2)$ 的切点。因此，我们标出对应于该瞬间的刀刃断面与轴的表面的交点 $A(A_2)$ 和 $B(B_2)$。这两个点的正面投影是重合的，因为两个点本身都在轴的圆柱面的同一条母线上。

为了找出点 A 和 B 的水平投影，只要求出它们之间的距离就够了。为此必须假定这两个点位在铣刀的表面上。

铣刀的表面是圆环面，并且可以根据这曲面上的点 A 和 B 的投影 $\bar{A}_2$ 和 $\bar{B}_2$ 找出这两个点之间的距离，如图 363 所示。同样地，还可以作出所求曲线上其它点的水平投影。

§7. 二次曲面相交·相交的特殊情况

1. 二次曲面相交是一个很有趣味的几何学问题，除此之外，它对于解一些技术问题也具有重要的实际意义。因此，有必要从一般的曲面相交问题中提出这个问题来进行专题研究。

由于二次曲面是代数曲面，所以它们的交线就是代数曲线，在一般情况下是空间曲线。

因为交线的次等于两曲面的次的积，所以这条交线总是四次曲线。为了与其它四次曲线区别开来，经常称之为**双平方曲线**。

当这种四次曲线分解为几条次数更低的曲线时更具有特殊的意义。这些情况可以用符号写成：

$$4=1+1+1+1$$

$$4=2+2$$
$$4=2+1+1$$
$$4=3+1。$$

第一种情况表示，四次曲线分解为四条直线，即分解为四条一次曲线。这在两个具有平行轴线的二次柱面相交的例子中可以看到。但特别重要的是分解为两条二次曲线，即分解为两条平面曲线的情况。能够产生这种情况的条件，可用下面所引的定理来阐明。

2. **定理 1** 如果两个二次曲面相交于一条平面曲线，则它们还相交于另一条曲线，这条曲线也是平面曲线。

应该指出，在二次曲面上的每一条平面曲线都是二次曲线。因此，上述定理的正确性就可根据这一事实直接证明，即由一条代数曲线分解而得的两条曲线，它们的次数的和等于原曲线的次数。

在已知情况下，交线是四次曲线，并且又知道这交线的一支是二次曲线。因此，第二支也必然是二次曲线，即平面曲线。作为定理 1 的推论，可得如下命题：如果二次曲面与球面相交于一个圆，则它与球面还相交于另一个圆。

上述定理以及下面将要引出的其它定理也包括这种情况：在交线分解的支线中有一支是虚的。

例如，研究一下两个球面的相交。根据一般原理，它们总是相交于一条四次曲线。在特殊情况下，即当它们实际上不相交时，其交线就认为是虚的。而当两个球面相交时，除了一个实圆外，在交线的组成中还包含一个虚圆。如果不注意到这个情况，则违反关于交线的次的一般原理及以后所有的定理。

我们举两个说明定理 1 及其推论的例子。

图 364 画出具有公共圆"底"$k(k_1,\ k_2)$的二次圆锥面和二次圆柱面。也就是说，这两个曲面沿着一条平面曲线相交。在这种情况下，交线的第二支不难找到，因为两曲面的公共对称平面平行于投影面 Π_2，因而所求的曲线在这个平面上表现为一条直线。

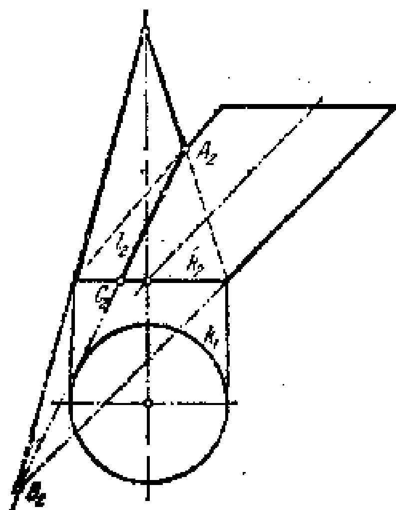


图 364

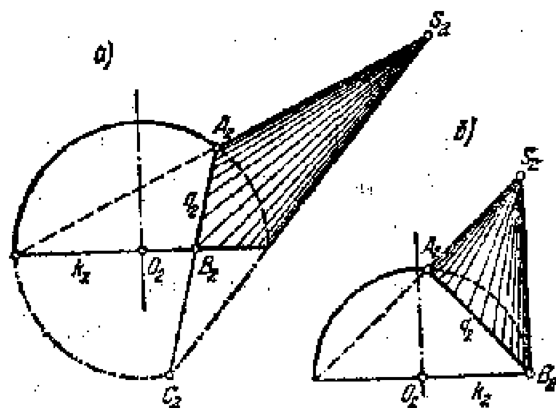


图 365

为了作出这条直线，只要作出两个点$A(A_2)$和$B(B_2)$就够了。这样，交线的第二支就是椭圆$AB(A_2B_2)$的一部分，根据它的正面投影不难作出水平投影。

图365 表示半球与二次锥面相交，并且锥面和半球的"底"是同一个圆$k(k_2)$，半球与锥面相交于这个圆。交线的第二支也是圆(圆的一部分)。这部分交线的作法在图上已表示清楚。

3. **定理2**(二重密切定理) 如果两个二次曲面有两个点相切，则它们的交线分解为两支平面曲线(二次曲线)，曲线所在的平面通过连接两切点的直线。

设两个曲面相切于点A和B(在图366上曲面没有表示出来)。这就是说，两曲面在这两点处有公共的切平面Σ和Θ。

在两曲面的交线上取一任意点M并作平面MAB。设这个平面与两已知曲面相交于二次曲线l和l_1，而与平面Σ和Θ相交于直线，这些直线就同时与l和l_1相切。但曲线l和l_1具有五个公共元素(三个点和两条切线)，所以彼此重合。在这种情况下得出，平面MAB与这两个曲面相交于同一条曲线。所以这条曲线应当是已知曲面的交线。总之，交线是通过点A和B的二次平面曲线。根据定理1，在曲面的交线中应当还有一条平面曲线，不难证明，它也通过点A和B。

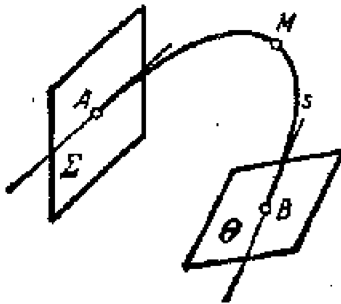


图 366

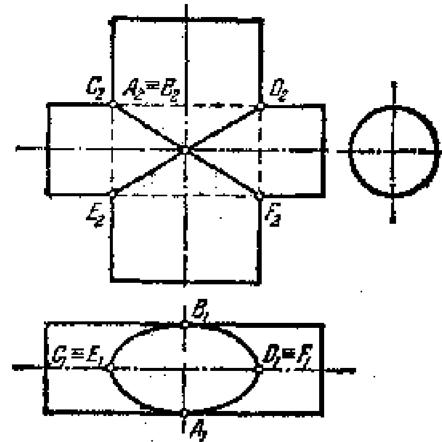


图 367

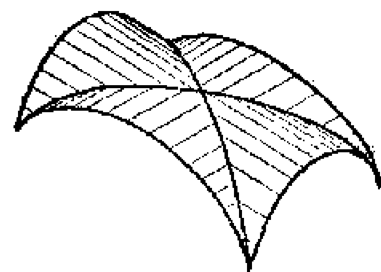
说明这个定理的例子见图367。图上表示圆柱面与椭圆柱面相交，这两个曲面相切于点$A(A_1, A_2)$和$B(B_1, B_2)$。

交线的两条平面曲线(一条双平方曲线的两支)在正立投影面上表现为直线D_2E_2和C_2F_2，因为这两条曲线位在通过直线$AB(A_1B_1, A_2B_2)$的平面上，因而也位在正面投射面上。

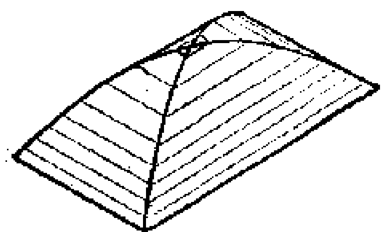
在设计一般建筑物的屋顶时，有利用这个几何例子的。图368上画出的十字形拱和四落水拱，在图367上看到的就是它们的曲面。

我们来研究应用二重密切定理解下列几何问题：二次锥面由顶点$S(S_1, S_2, S_3)$和垂直于轴线的椭圆截线给出(图369)，要求找出锥面的圆截线。

为了解题，我们作一个中心在锥轴上并与锥面相切于两点的辅助球面，如图中所示的中心为$O(O_1, O_2)$的球面。容易看出，在点$A(A_2, A_3)$和$B(B_2, B_3)$处锥面与球面有两个公共的切平面。锥



十字形拱



四落水拱

图 368

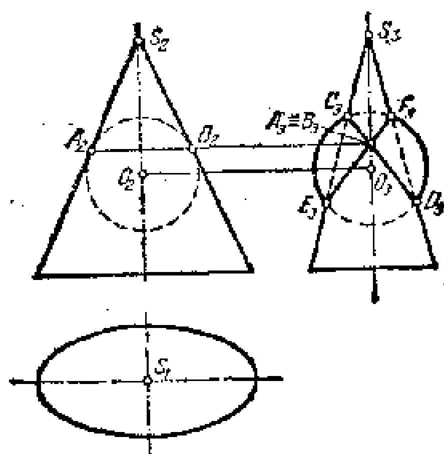


图 369

面与球面相交所得的那些平面曲线必通过直线$AB(A_2B_2, A_3B_3)$。因为这些曲线在球面上，所以它们都是圆.圆所在的平面是投影面Π_3的投射面。这样，直线C_3D_3和E_3F_3就是这些圆的投影。问题解决。

顺便指出，椭圆锥面上所得的圆截线称为反平行截线。三轴椭球面的圆截线正是用这样的方法作出的。

4. **定理 3** 如果两个二次曲面相切于三个点，则它们沿着一条平面曲线(二次的)相切，这条曲线所在的平面通过切点。

这个定理可以用来证明其它定理。特别重要的是它的推论：如果两个二次曲面沿着一条线相切，则它们的切线是二次平面曲线。

定理可以这样证明。

设有两个二次曲面Φ_1和Φ_2，在曲面上的点P、Q和R处有公共的切平面。通过上述三个点作平面，这个平面与曲面Φ_1和Φ_2相交于二次曲线l_1和l_2，而与在点P、Q和R处的每一个切平面相交于与l_1和l_2相切的直线。

这样，曲线l_1和l_2有三个公共点，并且在这三个点处有三条公切线。但是，如果两条二次曲线有五个公共元素，这两条曲线就重合。

曲线$l \equiv l_1 \equiv l_2$完全由二重点组成，因此应当认为是双平方曲线。在这种情况下，曲面Φ_1和Φ_2上不会有任何其它的交线。

现在，我们在曲线l上取任意点M，并证明在这个点处，已知的两曲面具有一个公共的切面。为此，应该注意，在点M处，两曲面有一条公切线，那就是曲线l的切线。不难断定，在点M处还有另一条公切线，因而还有一个公共的切面。

事实上，用通过点P和M的任意一个平面截割两个曲面，就得到两条二次曲线。

一般说来，这两条曲线应相交于四个点。在本情况下，在这些曲线上的点P处有公切线，所以点P对它们来说是二重点。但这些曲线上的点M也是二重点，因为，如果它不是二重点，那就表示在上述的两条曲线里，除了点

P 和 M 外，还有一个不属于交线 l 而属于另一条交线的交点 N。可是上面已经证明，除了 l 之外，在曲面 $Φ_1$ 和 $Φ_2$ 上不再存在其它的交线，可见点 M 也是二重点，而且可以过该点对所得的两条曲线作公切线。这条切线位在任意选定的截平面上，它与曲线 l 的切线一起在点 M 处确定一个对曲面 $Φ_1$ 和 $Φ_2$ 的公切面。

§8. 蒙日[1]定理·二次曲面的外形线

1. 我们来研究一个具有很大实际意义的定理，即著名的蒙日定理。

定理 1 如果两个二次曲面外切或内切于第三个二次曲面，则这两个二次曲面相交于两条平面曲线，这两条曲线所在的平面通过连接切线交点的直线(图370)。

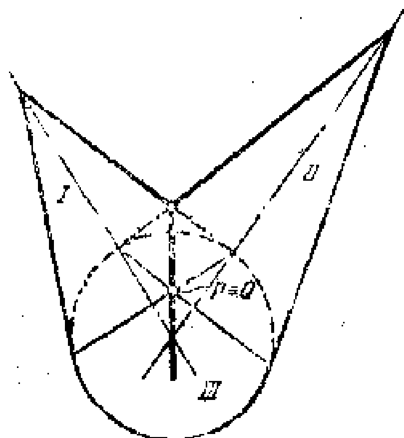


图 370

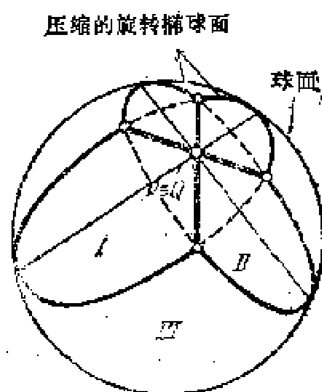
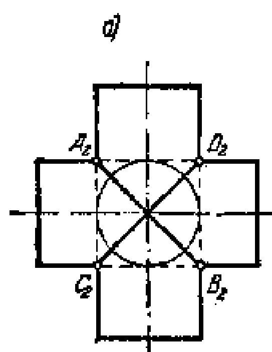


图 371

蒙日定理就是二重密切定理的特殊情况，并且可以根据二重密切定理来证明。事实上，假设这些切线(都在第三个曲面上而且都是平面曲线)相交于两个点 P 和 Q [2]，那么很明显，在点 P 的切平面将同时与第一和第二两个曲面相切。这表示点 P 就是已知两曲面的切点。同理，点 Q 也是已知两曲面的切点。因此，两曲面发生二重密切现象，所以根据二重密切定理，已知两曲面必相交于两条平面曲线。实际上，蒙日定理常用于两个相交的二次旋转曲面外切或内切(图 370, 371)于一个公共球面的情况。

2. 我们通过几个例子来研究这个问题。



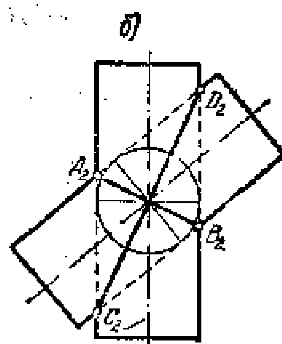


图 372

① 参看简史(本书第 272 页)。

② 在切点 P 和 Q 为虚点的情况下，定理也是正确的。

图 372 表示满足该定理条件的两个相交圆柱的正面投影。这样的两个圆柱的交线是椭圆；椭圆的正面投影表现为直线A_2B_2和C_2D_2。图 373 表示外切于球面的圆锥和圆柱相交。在这里，交线也是两个椭圆，这两个椭圆在正面投影上表现为直线A_2B_2和C_2D_2。

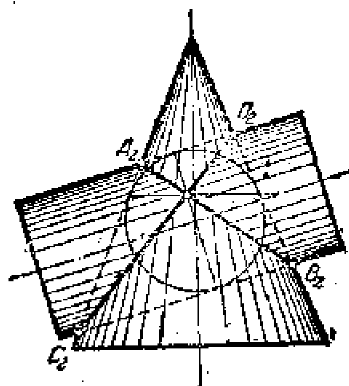


图 373

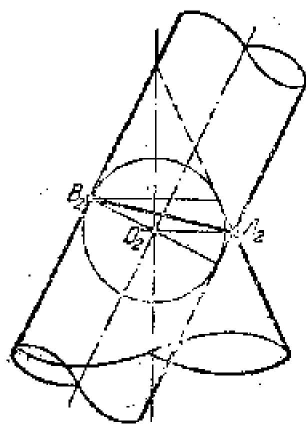


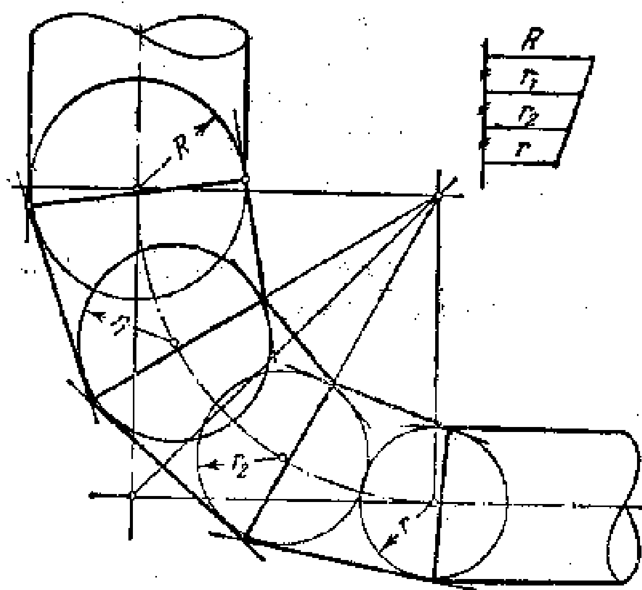
图 374

图 374 表示沿一条母线相切的圆锥和圆柱的相交。这条切母线在这里应当认为是由二次曲线退化而成的二重直线。因此，还要作出另一条二次曲线，它与切母线一起都是交线。在这图上，所求的曲线表现为直线段，它的一个点A_2是已知的。为了找出线段的第二个点，我们这样来进行。

在已知曲面里作一个中心为$O(O_2)$的公共内切球面。因为所求曲线应通过球面上的两个切圆的交点，所以要画出这些圆的投影。这时看出，它们唯一的交点就是点$B(B_2)$。所得的线段A_2B_2即所求曲线（椭圆）的正面投影。

3. 最后说明蒙日定理在设计用薄板材料制造的导管时的应用。

设已给出两根轴线相交的管子，如图375所示。要求在这两根管子之间作一个光滑过渡的接



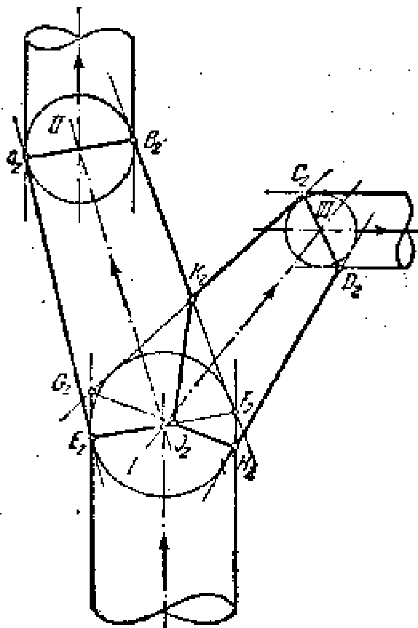


图 375

头。为此，先作出接头的光滑的轴线，例如一段圆弧，然后将这段弧分为若干等分，并取各分点为球心作球面，球面的半径应当均匀地改变。每一对相邻的球面确定一个圆锥，这些圆锥相交于平面曲线，这些曲线表现为直线段。

4. **定理 2** 如果两个二次曲面具有公共对称平面，则它们的交线在这个平面上投射为二次曲线。

设两个相交的二次曲面具有公共的对称平面。

曲面的交线（四次曲线）在这种情况下也将对称于曲面的公共对称平面。

假设，我们用垂直于对称平面的任意一个平面截割这条交线于四个点（在一般情况下这是可能的，因为它是四次曲线）。所得的四个点也将成对地对称。

现在，设想把这条交线以及上述截割这条交线的平面投射到对称平面上。

在投影中我们得到一条曲线和一条直线，这条直线与曲线相交于两个点，这两个点就是两对对称点的投影。

因为代数曲线（四次的）的投影也是代数曲线，并且后者与直线交于两个点，所以它是二次曲线。

说明这个定理的例子在前面已谈了很多。在研究二次曲面相交的各种情况时，我们都假设它们具有公共的对称平面。

在有关蒙日定理的那些图（图 372—375）上，双平方曲线在对称平面上投射为两条相交的直线，它们是从二次曲线分解出来的。

现在来研究由旋转锥面与球面相交而得的双平方曲线的投影。

使两个曲面处于图 376 所示的相对位置，并将它们移到如图所示的坐标系 $Oxyz$ 中，写出已知曲面的方程。假如将锥面看作是带有子午线 $z=mx$ 的旋转曲面，就求得锥面方程：

$$z=m\sqrt{x^2+y^2}。$$

球面方程是：

$$(x-k)^2+y^2+z^2=R^2。$$

将这两个方程联立起来就确定出交线。

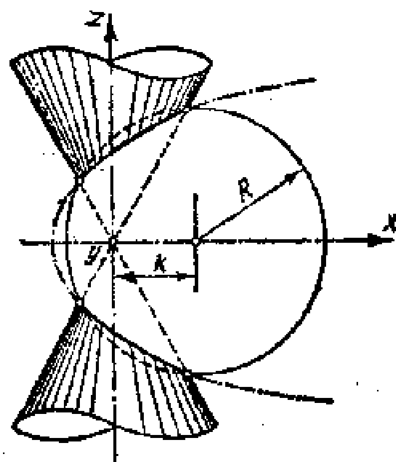


图 376

试研究这曲线在平面 Oxy 和 Oxz 上的投影的形状。为了得到在平面 Oxy 上的投影，可从方程组中消去坐标 z，因而得到：

$$(x-k)^2+y^2+m^2(x^2+y^2)=R^2,$$

$$(1+m^2)x^2+(1+m^2)y^2-2kx-(R^2-k^2)=0。$$

我们得到一个 x^2 和 y^2 具有同一系数而不包含乘积 xy 项的二次方程。大家知道，这样的方程表示一个圆，因此，双平方曲线的一个投影是圆。为了得到在平面 Oxz 上的投影，我们消去 y，于是得到：

$$(x-k)^2+\frac{z^2}{m^2}-x^2+z^2=R^2,$$

$$x^2-2kx+k^2+\frac{z^2}{m^2}-x^2+z^2=R^2,$$

$$\left(\frac{1}{m^2}+1\right)z^2-2kx-(R^2-k^2)=0,$$

$$z^2-\frac{2km^2}{1+m^2}\cdot x-\frac{R^2-k^2}{1+m^2}\cdot m^2=0;$$

或者

$$z^2=2px+q,$$

而这是一个抛物线方程，轴 x 是抛物线的轴。在该方程中，令 $z=0$，就得到顶点的坐标(横坐标)：

$$x_0=-\frac{R^2-k^2}{2k}。$$

在特殊情况下，当锥顶通过球心，即 $k=0$ 时，我们有：

$$\left(\frac{1}{m^2}+1\right)z^2-R^2=0,$$

$$z^2-\frac{R^2\cdot m^2}{1+m^2}=0$$

和

$$z=\pm\frac{R\cdot m}{\sqrt{1+m^2}}。$$

这表示抛物线分解为两条平行直线。

5. 我们来研究与作二次曲面外形线有关的一些问题。

定理 二次曲面的外形线是二次曲线。

这个定理有很重大的意义，因为在图上二次曲面常常用它的外形线给出。

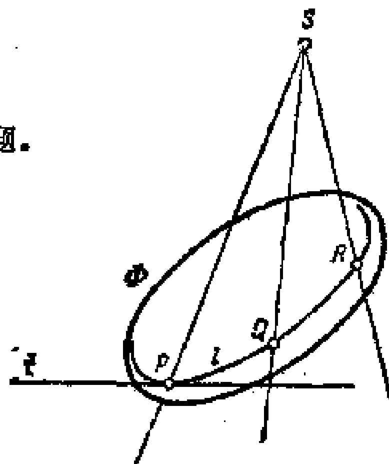


图 377

设从中心 S 投射曲面 Φ(图 377)。过 S 引曲面的任意三条切线，并用 P、Q、R 表示切点。这三个点确定一个平面，它与曲面 Φ 相交于二次曲线 l。现在设想有一个由顶点 S 和导线 l 确定的二次锥面。容易看出，曲面 Φ 与锥面 (S,l) 在点 P、Q、R 处有公共的切面。实际上，举个例说，曲面在点 P 处的切面可以由直线 SP 和 l 的切线确定。但在锥面的点 P 处切面也可以由同样的元素确定。在点 Q 和 R 处也是如此。

这样，已知的曲面 Φ 与锥面 (S,l) 密切于三个点，所以它们彼此相切。由此可见，锥面 (S,l) 是一个投射锥面。因为投射锥面是二次锥面，所以它与任何平面相交时，在该平面上所得到的曲面外形线仍然是二次曲线。

这个定理与其它有关二次曲面的定理一样，也包括二次曲线分解时的情况。例如，当锥面和柱面在图上的外形线表现为直线时，则这些直线应当认为是分解了的二次曲线。

复 习 题

1. 用来求两曲面交线的辅助面法是什么？
2. 辅助面法可分为哪几种方法？
3. 什么类型的相交曲面可以应用转动平面法？
4. 共轴旋转曲面的相交定理阐明了什么？
5. 在怎样情况下可以应用同心球面法？
6. 什么是二次曲面平截线的成对性定理？
7. 怎样阐述和证明二次曲面的二重密切定理？
8. 怎样证明两个二次曲面的切线是平面曲线？
9. 试阐述并证明两个二次曲面相交于两条平面曲线的蒙日定理。
10. 试列举双平方曲线分解的各种情况。

11. 如果两个二次曲面具有公共对称平面，则它们的交线在该平面上投射为怎样的曲线？

12. 什么叫做曲面的可见轮廓线、可见性线和曲面的外形线？

13. 关于二次曲面外形线的定理是怎样讲的？

练 习 题

1. 作出球面与棱柱面的交线的投影(图 378)。

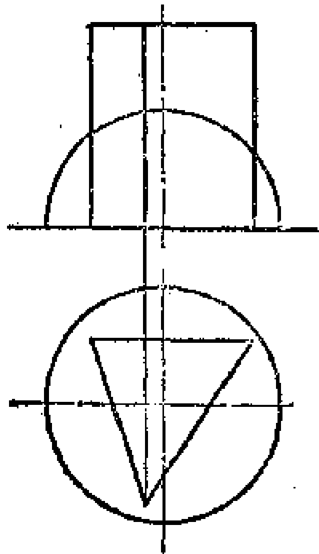


图 378

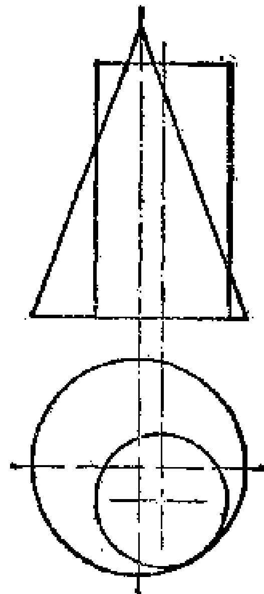


图 379

2. 作出图上所示的圆锥面与圆柱面的交线的投影(图 379)。

3. 作出两球面的交线的投影(图 380)。

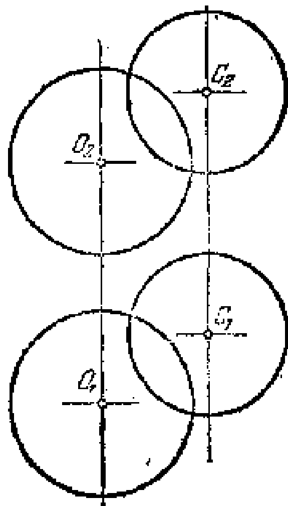


图 380

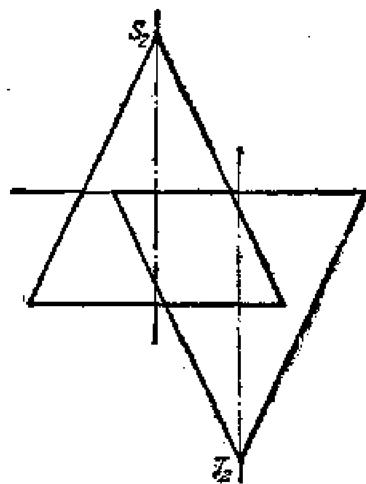


图 381

4 作出配置成如图所示位置的两个同样的旋转锥面的交线(图 381)。

5. 作出旋转锥面与旋转柱面的交线的投影，设它们的轴线是交叉的(图 382)。

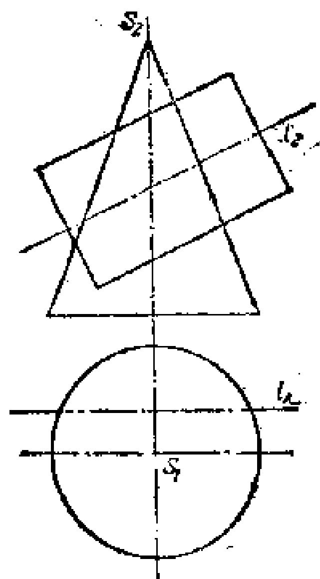


图 382

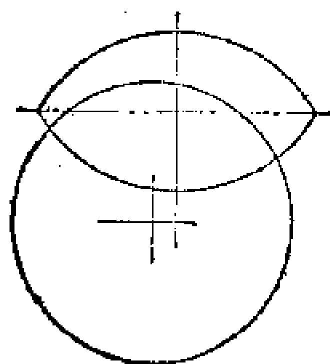


图 383

6. 作出球面与环状面的交线的投影(图 383)。

7. 写出图示的两个圆柱面交线的正面投影的方程(图 384)。

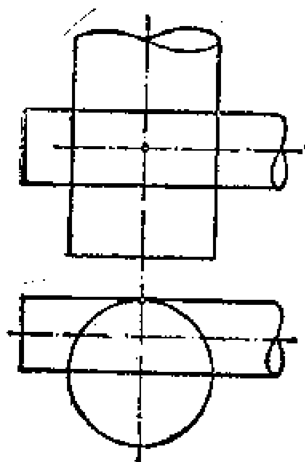


图 384

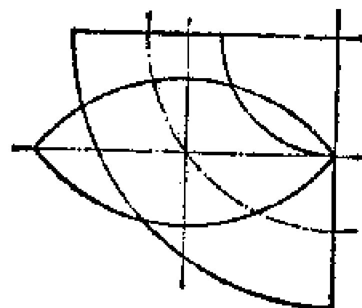


图 385

8. 作出两个已知旋转曲面(圆环面的一部分和环状面的一部分)的交线(图 385)。

9. 作出两椭圆锥面的交线的水平投影和侧面投影(图 386)。

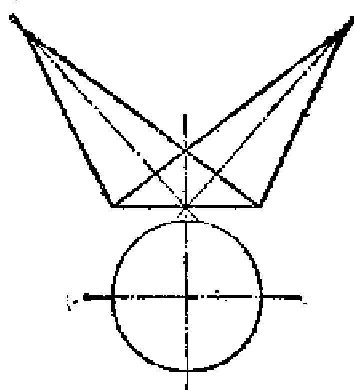


图 386

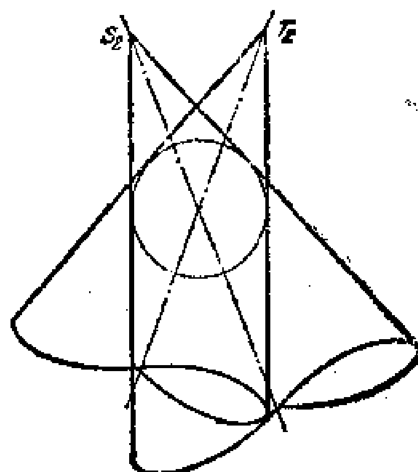


图 387

10. 作出外切于一公共球面的两个同样的锥面的交线(图 387)。

第十一章 表面的展开

§1. 多棱面的展开

1. 多棱面的展开图是由该表面的各个棱面依次绕侧边的棱边旋转而重合在同一平面上所组成的平面图形。这时所有的棱面在展开图上表现为实形。因此，展开图的作法归结为确定表面的各个棱面的实形。

各个棱面在展开图上的位置可以有不同的顺序。因此，这个顺序应使画展开图的薄板的面积得到充分利用。

2. 我们通过几个例子来研究多棱面展开图的作法。

例 1 求作斜棱柱的展开图(图 388)。

设在复合图上给出斜三棱柱 $ABCEFG$，棱柱的侧棱边处于正平线位置。如果侧棱边对投影面处于任意位置，则要先将图形变换，使这些棱边在新位置变成等距线。

用垂直于侧棱边的平面 $\Sigma(\Sigma_2)$ 截已知棱柱，并作出截线图形(本题是三角形PQR)的投影。定出三角形 PQR 各边的实长并作出等于该三角形周长的线段 P_0P_0，所得的这条线可以看作是棱柱法截面(三角形PQR)的"展开图"。从点 P_0、Q_0、R_0 和 P_0 起，沿垂直于 P_0P_0 的方向向两边

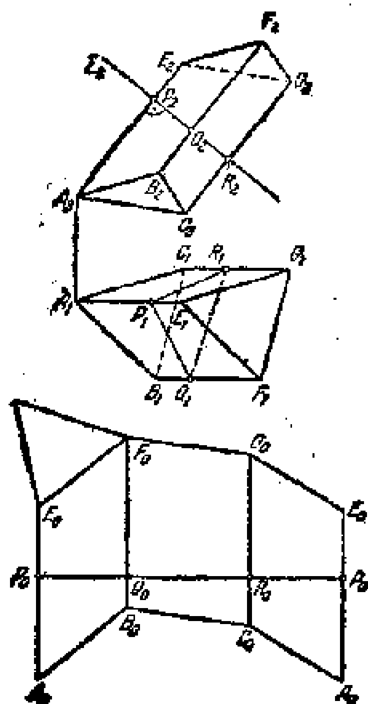


图 388

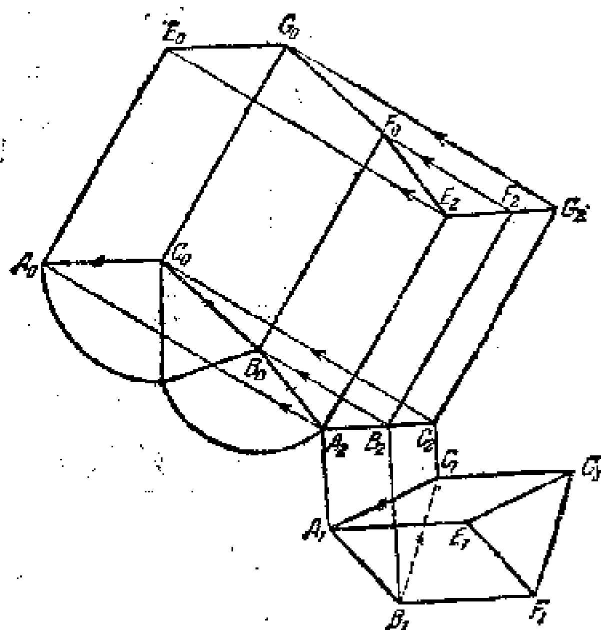


图 389

截取侧棱边上的线段，这些线段可从正面投影取得（$P_0E_0=P_2E_2$、$P_0A_0=P_2A_2$，……）。用直线连接所截棱边线段的端点，如图所示。图形 $A_0B_0C_0A_0E_0G_0F_0E_0$ 就是棱柱的侧棱面的展开图。最后还要作出棱柱的两个底面。

当棱柱的底面有一个投影表现为实形时，它的展开图就可用比上述方法更加方便的另一个方法作出。

设有一个通过棱边 $AE(A_1E_1，A_2E_2)$ 的正平面（图 389）。要使所有的侧棱面都重合在这个平面上。为此，去掉棱柱的底面，同时沿着棱边 $AE(A_1E_1，A_2E_2)$ 将棱柱剖开。为要在这个正平面上作出棱面 $ABEF$，可使棱边 $AE(A_2E_2)$ 留在原来的位置，但要确定棱边 BF 在重合后的位置，则需要找出点 $B(B_1，B_2)$ 和 $F(F_1，F_2)$ 在重合后的位置——点 B_0 和 F_0。

如果从点 A_2 起，以半径 $AB=A_1B_1$ 的圆弧截垂直于 A_2E_2 的直线 B_2B_0，在 B_2B_0 上就得到点 B_0。

点 F_0 是在直线 B_0F_0 和 F_2F_0 的相交处得到的。

不难看出，用上述方法作点 B_0 时，实质上是使点 $B(B_1，B_2)$ 绕正平线 $AE(A_1E_1，A_2E_2)$ 旋转。点 C_0 和 A_0 的作法与点 B_0 相同，而点 G_0 和 E_0 则与点 F_0 相同。将对应的点用直线连接起来，并作出底面，就得到棱柱的展开图。

作棱柱展开图的第一个方法称为法截面法，第二个方法称为侧滚法。

例 2 求作棱锥的展开图（图 390）。

因为棱锥的侧棱面是三角形，所以作棱锥的展开图就归结为作出这些三角形的实形。但应当先用任一种熟悉的方法求出全部棱边的实长。如果棱边很多，则用三角形法确定棱边的实长最为方便。同时，所有三角形应该作在已知图形的旁边（参看图 390）。

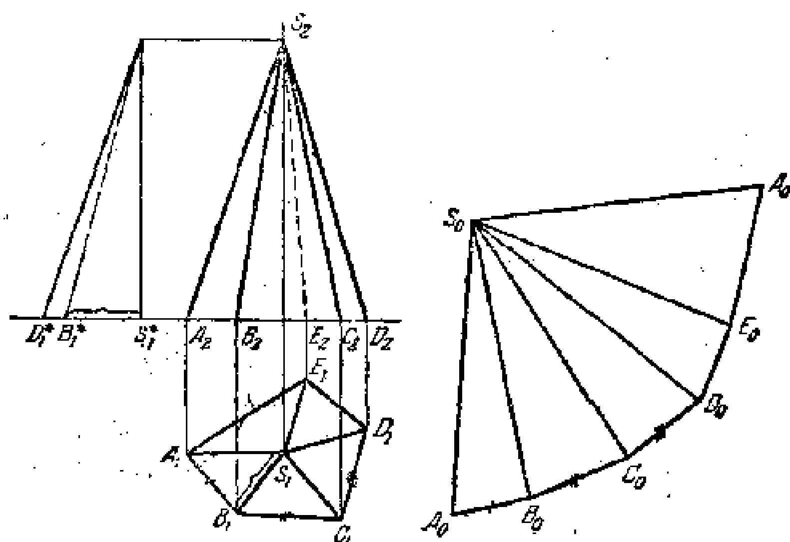


图 390

图 391 和 392 上表示截棱锥展开图的作法。

在第一个图上，棱锥的侧棱面摊开在水平的下底所在的平面上，用这个方法确定这些棱面后，紧靠着下底作

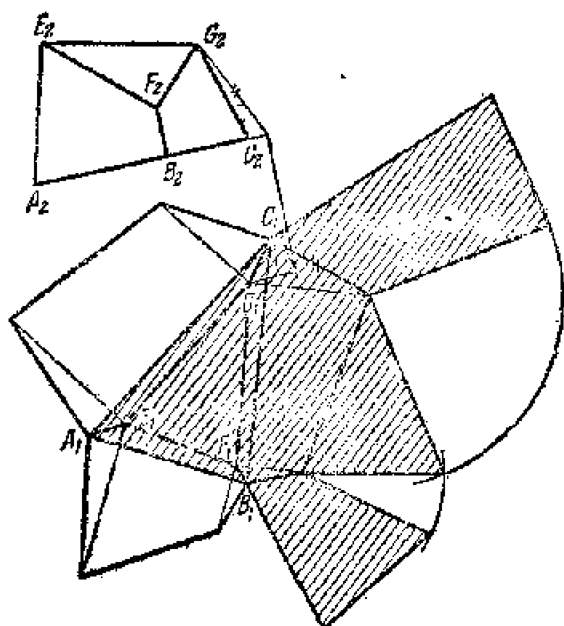


图 391

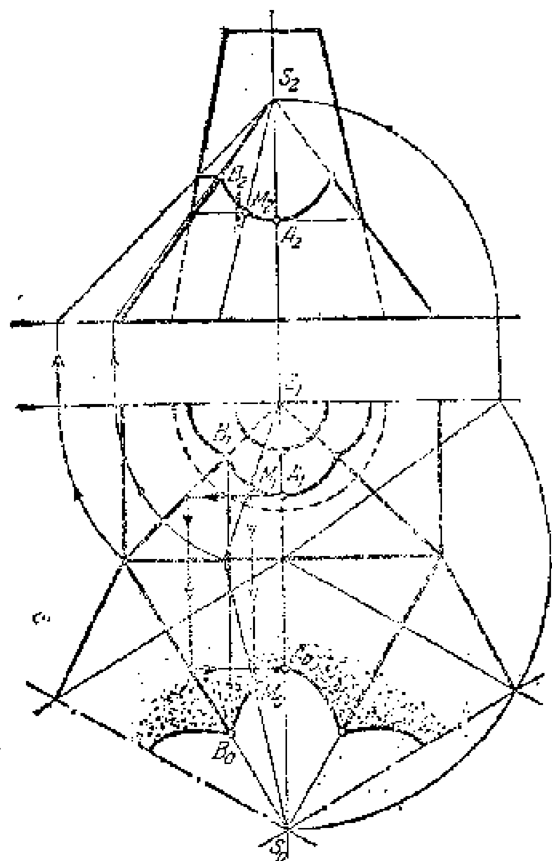


图 392

出了展开图，这个图也就把下底包括进去。

在第二个图上，棱锥与圆锥相交。因为棱锥是正的，所以首先只找出了一个棱面的实形。这个实形也是使前棱面摊开在下底面而作出的，摊开时利用了顶点 $S(S_1, S_2)$。摊开后，顶点 S 占有位置 S_0。

由于摊开之后，前棱面的水平投影和实形之间建立起亲似对应，因此就利用这个对应来作棱锥与圆锥的交线的实形①。交线上一些点的投影的作法，图上已表示清楚，不必说明。

§2. 曲面展开的基本性质

1. 今后假设曲面不是绝对坚硬的薄壳，而是能弯曲但不能拉伸的薄膜。在这样的假设下，某些曲面看来可以逐步变形而重合在一个平面上，使在重合过程中既不发生破裂，也不发生皱纹。

具有这种性质的曲面称为**可展曲面**，而由曲面重合于平面所得的图形称为**展开图**。

作展开图是一个重要的技术问题，因为工业上采用的各种容器和管道结构有许多是用薄板材料弯曲成的。

作展开图是设计这种薄板结构的一个重要阶段。

可展曲面及其展开的概念是简单而直观的，但为了研究这些概念的几何性质，还需要对它

---

① 参看第一章§3，亲似对应。

们作更精确的定义。

对画法几何来说，这些概念可定义如下。

2. 我们仍然认为，曲面展开图可将表面伸展并重合在平面上而作出，但在伸展时，曲面不得破裂，也不得形成皱纹。在这种条件下，如果把曲面和它的展开图都看作是点集，在这两个点集间可以建立起相互的一一对应。也就是说，曲面上某一个点对应于展开图上唯一的一个点，曲面上某条线对应于展开图上的一条线，反之也一样。

上述的一一对应具有一系列非常重要的性质，现在归纳如下(图 393)。

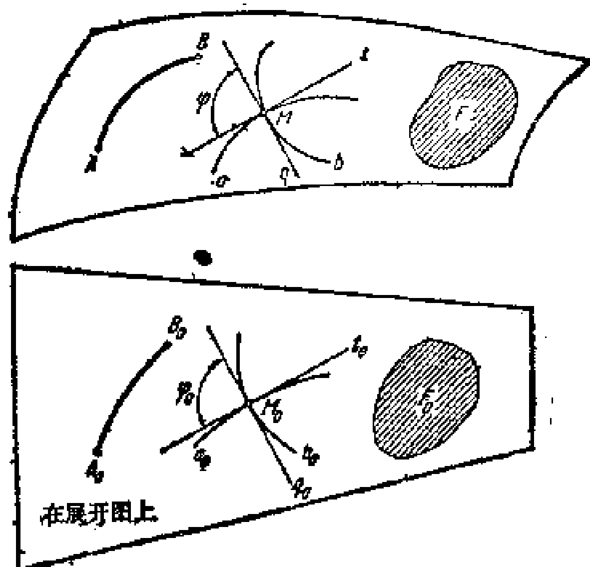


图 393

1) 展开图和曲面上的两条对应线的长度彼此相等，或者当曲面展开在平面上时，曲面上的线的长度保持不变。

2) 在展开图上两条线间的角度等于曲面上两条对应线间的角度，即曲面展开时，面上两条线间的角度保持不变。

角度保持不变的几何变换称为**保角变换**，因此可以说，**曲面和它的展开图是保角的**。

3) 曲面上的闭合线和展开图上与它对应的闭合线围成相同的面积。

由此推出，展开图的面积等于曲面本身的面积。

这三个性质可以简要地表达为：**在展开图上，曲面上的线的长度、两线间的夹角以及由闭合线所构成图形的面积保持不变。**

此后，展开图就可定义为曲面到平面图形的相互一一对应且具有上述三个性质的几何变换。

不难看出，展开图的第一个性质是根据曲面不可拉伸，因而也是不可压缩的薄膜这个性质推出的。实际上，如果薄膜是不可拉伸和不可压缩的，则当它弯曲时，画在它上面的线的长度既不会增加，也不会减少。因此，线的长度保持不变。

根据第一个性质可以证明第二和第三个性质，因此第一个性质应该认为是最基本的。

其次还应指出两个重要的性质，其中一个断定，**曲面上的直线变为展开图上的直线**，另一个断定，**平行直线仍变为平行直线**。第一个性质的正确性可用下面的理由证明。

设曲面上的点 A 和 B 用不同的几条线连接，其中有一条为直线 AB。

在展开图上与上述两点对应的是确定的点 A_0 和 B_0。与每一条曲线对应的是展开图上的一条曲线，而与点 A 和 B 间最短的线(即直线 AB)对应的是平面上点 A_0 和 B_0 间最短的线，即也是直线①。直线的平行性在展开图上保持不变这个性质可由曲面上两条线间的夹角保持不变的第二个性质直接得出。

我们来研究一个简单的例子，通过这个例子容易理解上述的基本性质。

图 394 表示一个圆锥面和它的展开图。展开图呈扇形，扇形的弧 q_0 等于圆周 q 的长。圆锥的直母线 SA 变为对应的直线 S_0A_0。SA 和 q 之间的角由于是通过 SA 和在点 A 的切线 t 之间的夹角来度量的，而且是直角，因此仍变为对应的线 S_0A_0 和 t_0 之间的直角。最后，圆锥面的面积也等于展开图的扇形面积。

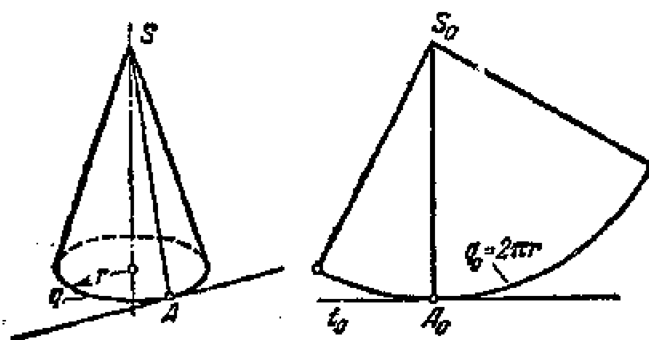


图 394

但应该指出，如果我们在圆锥面上取任意两条母线，则它们之间的夹角小于展开图上与它们对应的两直线之间的夹角。这表示对于母线来说，第二个性质是无效的。原因是展开图的所有上述性质只有对曲面的普通点才是正确的。

圆锥的顶点是特殊点，因此为普通点所特有的所有性质对它无效。

3. 我们试更加明确地说明可展曲面的概念。

在微分几何教程里证明，**如果通过直纹面上任意一点的切面与曲面沿着通过该点的整条直母线相切，则该直纹面是可展的。**换句话说，可展直纹面在同一母线上所有各点处的切面是同一个平面。反之，如果直纹面在同一母线上的不同点处有不同的切面，则该直纹面是不可展的，因而称为拗面。属于可展直纹面的有这三种曲面：**柱面、锥面和盘旋面**(空间曲线的切线面)（图 395, а, б 和 в)。

所作的定义也可以作为一个特征，以解决怎样给定的曲面是可展还是不可展的问题。

现在来研究锥状面，这曲面由圆导线 k、直导线 MN 和垂直于 MN 的母线的平行导面给

① 相反的论断是不正确的，因为通过曲面上两个任意点的直线是不存在的。

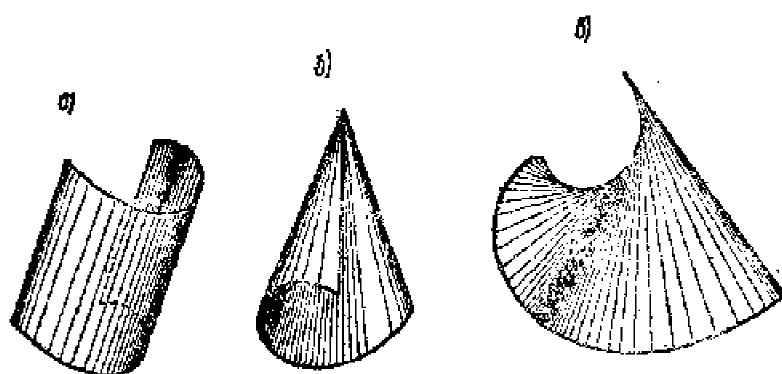


图 395

定(图 396)。

在曲面上任取一母线 AB，并在点 A 和 B 处作切面：$\Omega(MN\times AB)$；$\Theta(t\times AB)$。不难看出，平面 Ω 与 Θ 彼此相交而不重合，所以已知的曲面是挠面。这个结论之所以正确，是因为母线 AB 是任意取的。但在这种曲面上也可以看到这样的母线，线上各点处的切面都重合在一起。不过它们只有四条（MP、NQ、LT 和 LR；其中 LR 没有表示出来），它们应当认为是特殊的，因为曲面在这些母线处的性质与其它处的完全不同。

可展曲面的这个特征，如果按下面的方法来考虑，那是很明显的。

假设给出的直纹面包围着一个坚硬的物体，因此曲面本身也是坚硬的。又设曲面放在一个平面上。这时，如果它是可展的，则它与平面沿着整条母线相切。这样的曲面就可以使它在平面上滚动而沿着母线与平面相切。滚动的结果，在平面上留下曲面的印迹，这个印迹就是曲面的展开图。

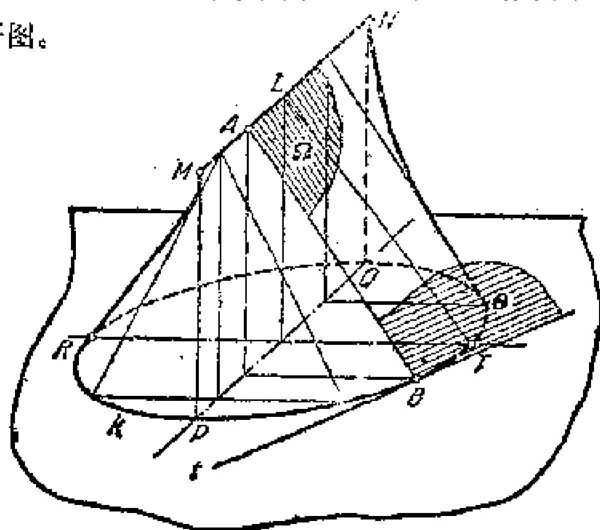


图 396

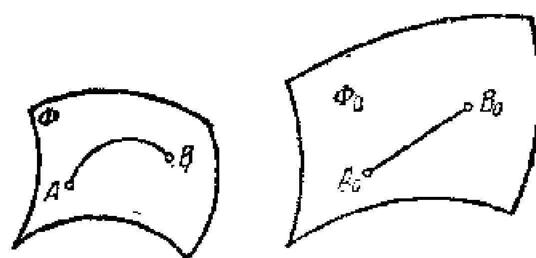


图 397

4. 设有曲面 Φ 和它的展开图 Φ_0（图 397）。在展开图的任意两个点 A_0 和 B_0 间引直线段 A_0B_0。曲面上与点 A_0 和 B_0 对应的点是 A 和 B，而与直线 A_0B_0 对应的是曲线 AB，并且 $\overset{\frown}{AB}=\overline{A_0B_0}$。因为 A_0B_0 是连接 A_0 和 B_0 的所有线段中最短的，而曲面上的对应线段的长度是相同的，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 也就是曲面上过点 A 和 B 间所引的全部弧中最短的。

因此，可展曲面上两点间的线对应于曲面展开图的直线时，这条线就是这两点间的短程线。

根据已知性质，这种短程线可以借助展开图而很容易作出。但两点间的短程线不仅可在可展曲面上看到，在所有其它曲面上也可以看到。

譬如，在球面上取两点，但要不在同一直径的两端，过这两点在球面上作一个大圆，则连接这两个点的较短的一段圆弧就是这两点间的短程线。

任意曲面上的短程线是属于曲面上的所谓测地线，它对曲面所起的作用正如直线对平面所起的作用一样。

除了球面上的大圆以外，曲面的直母线、旋转曲面的子午线、圆柱面上的螺旋线以及位在曲面的对称平面上的所有平面曲线都属于测地线。

最后我们指出，对于任何曲面，如果发现它即使只违反了曲面展开图的上述性质中的一个，就可断定该曲面是不可展的。

例如，我们来研究球面。在球面上取不位于同一大圆上的三个靠近的点。每两个点可以分别用一个大圆的弧连接，这样就作出一个球面三角形。

因为这三角形的每条边都是两点间的短程线，在球面的展开图上应当变为直线，所以在展开图上就应当得到一个普通的三角形。但这是不可能的，因为在平面的三角形里，三个角之和等于两直角，而在对应的球面三角形里，三个角之和总大于两直角。因此，对于球面的展开图不具备曲面上两相交线间夹角保持不变这个条件，所以球面是不可展曲面。

§3. 展开图的近似作法

1. 假定某可展曲面是用方程或用确定其尺寸的数字给定。

因为曲面上的线的长度和两线间的角度在曲面展开图上保持不变，所以经过计算确定出线的长度和某些角度的大小之后，就可在展开图上作出这些线和角度。当然，用这种方法必须找出所有为了完全确定整个曲面展开图所需的尺寸。

譬如，如果已知旋转锥面的高为 h，底圆直径为 d，则曲面就由这些数字确定。根据这些数字可以算出展开图的尺寸，也就是扇形的尺寸。例如，扇形半径 $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$，扇形的中心角 $\varphi=\frac{\pi d}{l}$。由于根据可展曲面的已知尺寸来计算展开图的尺寸可以得到所需的任意精确度，所以这种由计算确定尺寸的展开图可以称为精确的展开图。不过实际上这种方法很少应用。

在画法几何以及在用画法几何方法求解的技术问题中，曲面总是由图样给出的，展开图则根据这个图样用图解法作出。所有用图解法作出的展开图都是近似的。

在实践中也一定会遇到不可展曲面的“展开”问题。由薄钢板制成的大型圆柱形贮藏器的球面底部可作为一个例子。理论上，不可展曲面是不能展开的，即使实际上是展开了，但在可展曲面的近似展开和不可展曲面的近似“展开”之间仍是有很大区别的。

要从第一种情况中得到所需的曲面，只要将画有展开图的薄板弯曲起来即可。但要从第二

种情况中得到曲面，除了弯曲之外，还要对薄板进行局部的、但通常是非常猛烈的拉伸和压缩。

2. 作曲面近似展开图的一般方法如下。

将所给的曲面用另一个表面来近似地代替，这个表面要内接或外切于所给的曲面，并且要易于展开。直纹面可用多棱面来代替，这些棱面为三角形或平行四边形，而曲纹面（具有曲母线）则可用旋转柱面和锥面那样的简单可展曲面来代替。这些简单可展曲面又照样地可用一些多棱面来代替，而展开的正是这些多棱面。

其次我们详细地来研究上述的一般方法在各种实际问题上的应用。

§4. 作曲面展开图的基本图解法

1. 先研究所谓三角形法（三角剖分法）。除了柱面以外，所有直纹面的展开都可以用这个方法。柱面虽然也可以用这个方法展开，但不方便。三角形法的实质是用具有三角形棱面的内接多棱面来代替直纹曲面。

现在通过几个例子来说明这个方法的应用。

例 1 试作出由底圆和顶点给定的椭圆锥的展开图（图 398）。作已知锥面的内接棱锥，使棱锥的底为一正二十四角形。

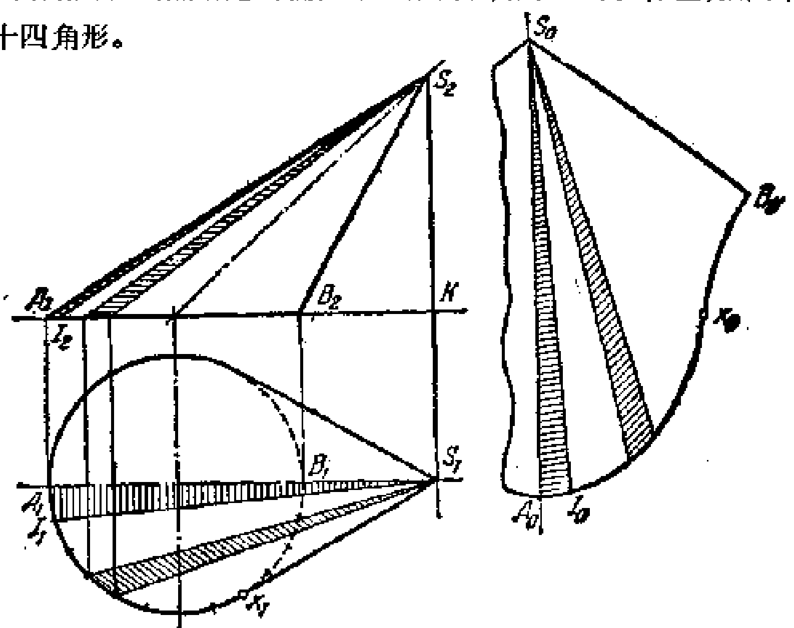


图 398

然后我们用弦来代替底圆的弧，因此就要确定这种代替所产生的误差。这误差是

$$f=\frac{1}{24}\left(\frac{s}{R}\right)^2=\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{2\pi R}{24R}\right)^2=0.28\%,$$

即不大于 0.3%[①]。

应注意到，所给的曲面有一个对称平面。当曲面处于图中所示的位置时，该对称平面通过椭圆锥的轴线且平行于正立投影面。由于具有对称平面，所以只要作出曲面一半的展开图即可。

---

① 参看第六章 §5。

作图可按如下次序进行。

在任意直线 A_0S_0 上截取线段 $A_0S_0=AS=A_2S_2$，并在它上面作一个以 SI 和 AI 为其它两个边的三角形。在图上边 AI 的实长为已知，因为 $AI=A_1I_1$。

边 SI 的实长是这样求的。用分规量取线段 S_1I_1，沿水平线从点 K 起截取这个长度，并扎一个孔表示点 P（图上未表示出来）。将分规的一个尖端留在 P 点，同时将分规张开，使另一个尖端从点 K 移到点 S_2。

结果，分规的张度便等于线段 SI 的长度。

不难看出，上述作法实际上是用旋转法确定线段的实长，只是在图中省去作辅助线，因而使作图更加简单和准确。利用分规所得针尖的距离 SI，以点 S_0 为圆心，在点 A_0 附近用针尖画一个不大的弧，然后用另一个量具(带微动螺杆的)在这弧上标出点 I_0，使得 $A_0I_0=A_1I_1$。这样就作出与已知锥面内接的棱锥的一个三角形棱面的实形。

同样地依次作出其它所有的棱面。然后用曲线板将用小弦法展开了的锥底上的点连成光滑的曲线。

值得注意的是锥面底圆展开图上的一个特殊点(点 X_0)。它是一个拐点，通过它的母线就是对锥底平面的可见轮廓线，这样便可求出这个点。

例 2 试作出柱状面的展开图(图 399)。

设柱状面由两个同样的圆 $ADG(A_1D_1G_1, A_2D_2G_2)$ 和 $A'D'G'$ $(A_1'D_1'G_1', A_2'D_2'G_2')$ 给定。第

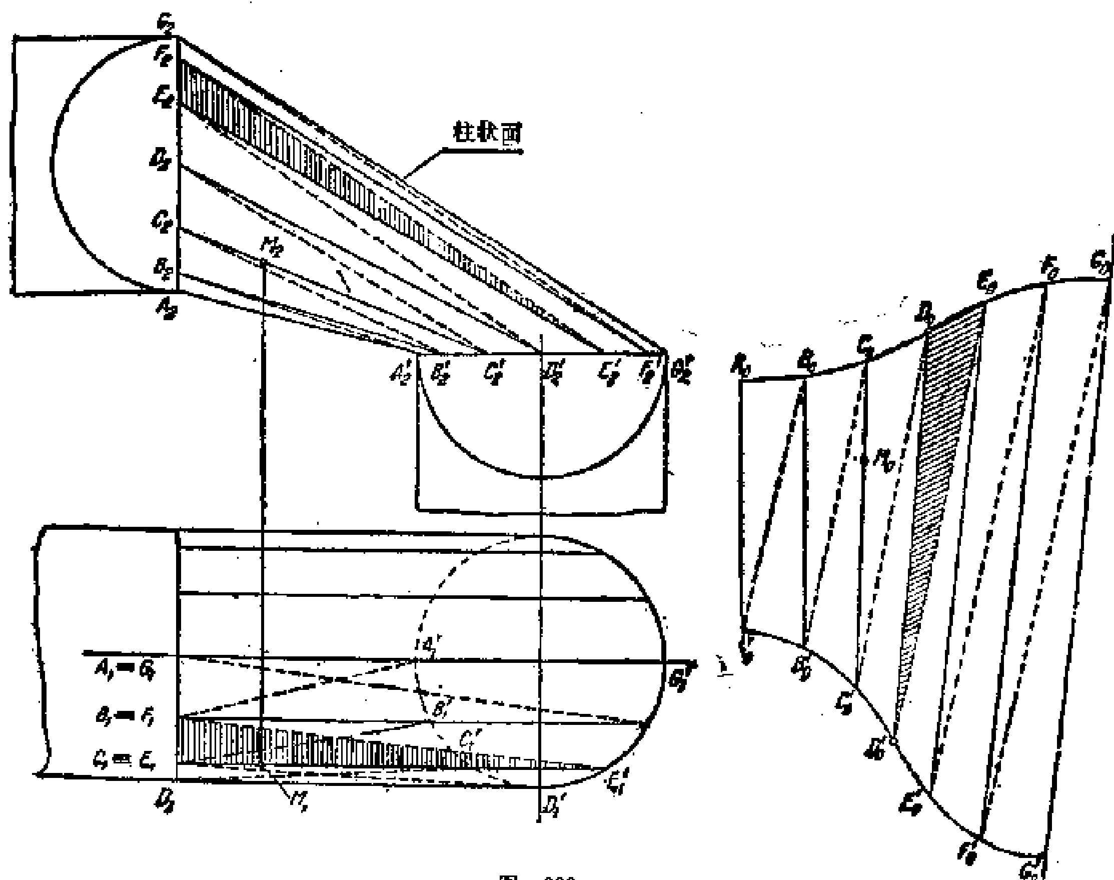


图 399

一个圆位在侧平面上，第二个圆位在水平面上。连接这两个圆心的直线平行于正平面，因而正平面就是母线的平行导面。曲面有一个对称平面，因此可以只作曲面一半的展开图。

作出母线 AA'、BB' 等，如图所示（参看图 399）。将由两条相邻母线 AA' 和 BB' 所围成的曲面元素用“对角线”BA' 把它分开，这个曲面元素便看作由两个三角形组成。

同样作出半个曲面的其它元素。结果，已知的曲面就由具有三角形棱面的一个多棱面所代替。以后，将多棱面的所有三角形象例 1 那样作在一个平面上。这时，各个三角形（实形）的顶点必须用与复合图一致的字母标出。

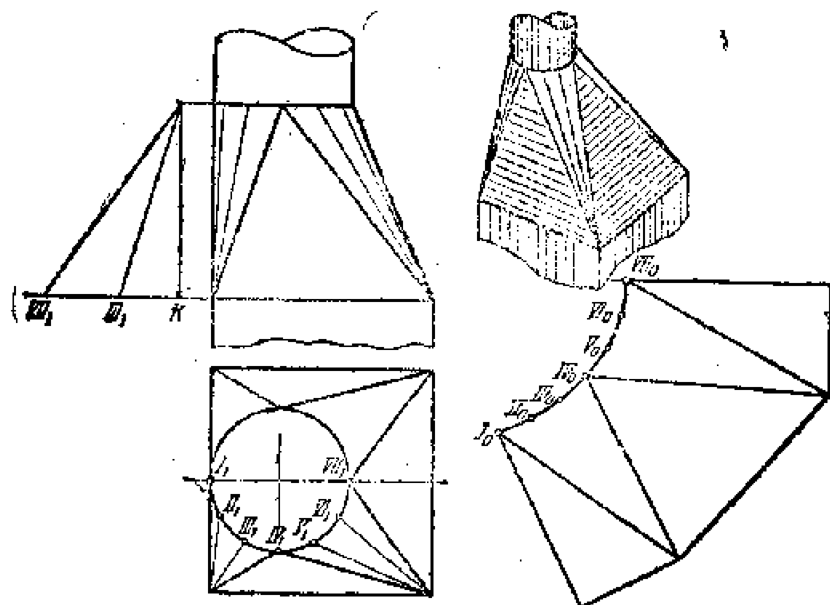


图 400

图 400 画出导管的一部分结构。这个部分是圆形管子和方形管子之间的一个接头。但图上只画出这个接头的表面展开图的一半。展开图是用三角形法作出的。

2. 各种柱面的展开图都可用法截面法和侧滚法作出。

第一个方法是在已知柱面内作侧棱面很窄的内接棱柱面，然后用法截面法将这个棱柱面展开。

第二个方法是使内接的棱柱面“侧滚”①。在这两个方法中，所给曲面对于投影面的位置都应使曲面的母线平行于一个投影面，也就是使母线占有等距线的位置。

这时，如果曲面的边界线投射后变了形，就宁可使用法截面法来作展开图，但如果曲边界线在某一个投影面上投射为实形，则以侧滚法较为方便。

我们来研究椭圆柱面展开图的作法，椭圆柱面如图 401 所示。由于在已知情况下，柱面的底圆投射到水平投影面上没有变形，因此采用第二个方法。

在柱面里作内接棱柱面，在图上只要标出与柱面母线重合的棱柱侧棱边（AA'、BB'……）就够了。

① 参看本章§1。

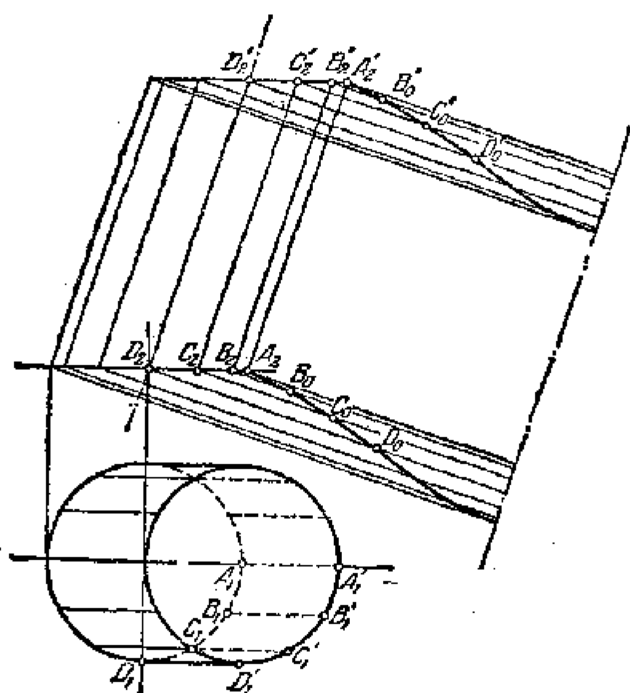


图 401

现在求棱面 $ABA'B'$ 的实形。为此，将这棱面绕正平线 AA' 旋转到成为正平面。这时点 B_2 沿垂直于 A_2A_2' 的方向移动到位置 B_0。B_0 可沿此方向从点 A_2 起截取一线段等于 A_1B_1 而求得。再从点 C_2 引 A_2A_2' 的垂线，并从点 B_0 起用线段 B_1C_1 截这垂线而找到 C_0，等等。这样就得到一系列的点 $A_0 \equiv A_2$、B_0、C_0、D_0 ……，这些点确定了柱面下底展开后的边界。点 D_0 就是曲线上的拐点。

展开的图形可以看成是柱面沿着过母线 AA' 的正平面滚动而得的印迹。

3．作不可展旋转曲面的近似展开图，常常采用**辅助柱面法**和**辅助锥面法**。

辅助柱面法如下。利用子午线将已知曲面划分为若干比较狭小但彼此相等的部分或瓣（图 402）。每个这样的瓣都用柱面来代替，这个柱面则与已知旋转曲面在该瓣正中的一条子午线的点处相切。在该瓣两侧的两个子午线平面就是柱面母线的界限。

为了使所作图形更清楚，曲面只划分为六个相等部分。其中以主子午线 SA 作为正中子午线的那一部分已经用柱面来代替。柱面的母线通过子午线 SA 上的点，并垂直于正立投影面。母线的长在水平投影里作为角 $B_1S_1C_1$ 范围内的线段而容易求出。然后，作出上述柱面的展开图。因为这个柱面对母线的法截面（即子午线 SA）是已知的，所以作展开图时采用法截面法较为方便。

在主子午线上标出一系列的点 A、D、E、F、G，并通过这些点引母线线段。然后将子午线 SA 伸直为直线 S_0A_0，在该直线上标出点 D_0、E_0、F_0、G_0。在这些点处作母线（$B_0C_0 = BC = B_1C_1$ …… 等等）垂直于 S_0A_0，并将各母线的端点连成一条光滑的曲线。

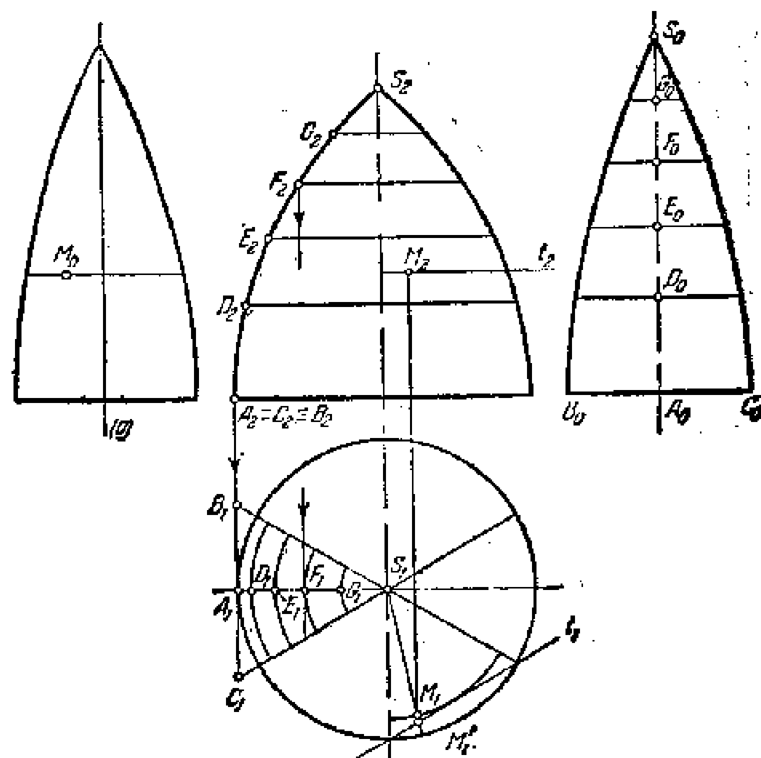


图 402

根据上述可知，用以作旋转曲面近似展开图的柱面法，就是用另一个这样的表面来代替不可展旋转曲面。这个表面由若干柱面组成，因而也就是由可展元素组成。

4. **辅助锥面法**，顾名思义就是用另一个表面来代替旋转曲面，该表面由内接于已知曲面的若干锥面组成(图 403)。

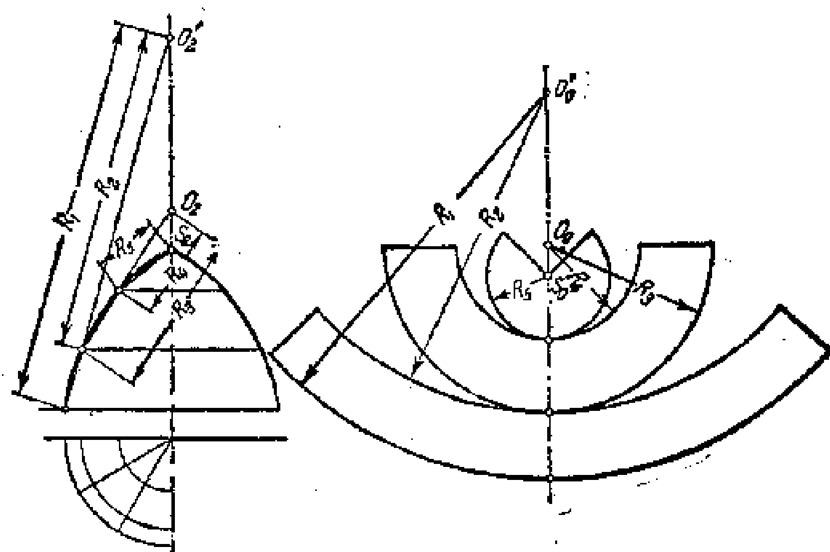


图 403

这样，旋转曲面就被分为若干条带，而每一条带都用锥面代替。在图 403 上，有三条这样的带，因此作曲面的近似展开图就归结为作三个锥面的展开图。显然，半径为 R_2 和 R_3 的弧长、半

径为 R_4 和 R_5 的弧长是相等的。

将各个锥面卷起并叠起来之后，由这些圆弧围成的圆，应当成对地重合在一起而且成为已知曲面上的圆。

因此，我们可以说，曲面上的一些圆在曲面展开图上变成裂开的线，这样一来，在已知情况下，展开图的一个基本性质被破坏了。这种情形在所有不可展曲面的展开图上都可以看到。

§5. 斜截圆柱和锥顶在图外的截圆锥的展开

1. 假设，求作斜截圆柱(例如，肘管的一部分)的展开图(图 404)。斜截线的图形是一个椭圆。在圆柱展开图上，这个椭圆变为正弦曲线，这可用下面的计算证实。

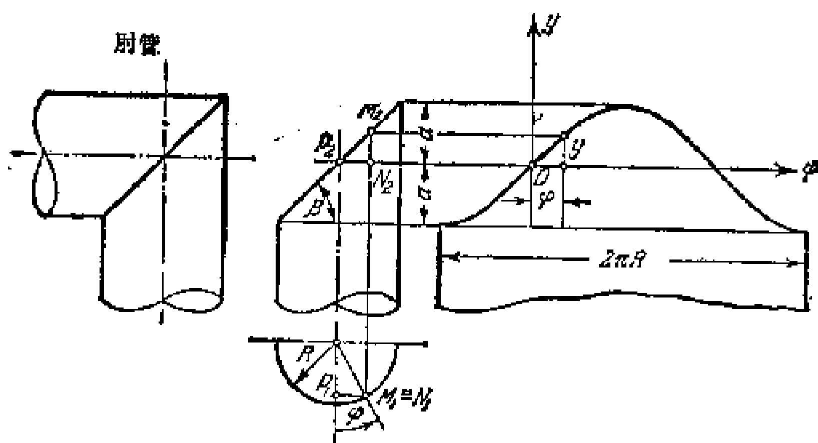


图 404

计算圆柱母线的一段 $MN=M_2N_2$：

$$MN=M_2N_2=P_2N_2\cdot\operatorname{tg}\beta,$$

这里，线段 P_2N_2 可以表示成 $P_2N_2=P_1N_1=R\cdot\sin\varphi$。

因此，

$$MN=M_2N_2=(R\cdot\operatorname{tg}\beta)\sin\varphi$$

或

$$y=a\sin\varphi。$$

据此，圆柱的斜截线在展开图上可以作成振幅为 a 的一个正弦波。

2. 现在来研究锥顶在图外的截圆锥的展开图的一种作法。

设有某一曲线 $A_0B_0C_0$……，要求作出一条比它大 k 倍的相似曲线 $A_0'B_0'C_0'$……(图 405)。数值 k 称为曲线的相似系数。

为此，选择一个任意点 S_0，并过该点和曲线 $A_0B_0C_0$……的各点引射线。在射线 S_0A_0 上从点 S_0 起截取线段 S_0A_0'，使等于线段 S_0A_0 的 k 倍，由此得点 A_0'，这个点即属于所求的曲线。

其余的点 B_0'、C_0'……也用同样方法求出，因而就作出与已知曲线相似的曲线。

应该注意两个相似锥面的展开图也是相似的，所以截圆锥展开图可以这样作出。

作一个锥顶为 $T(T_2)$ 的辅助圆锥，使与锥顶在图外的圆锥相似。选择辅助圆锥的底圆直径 d

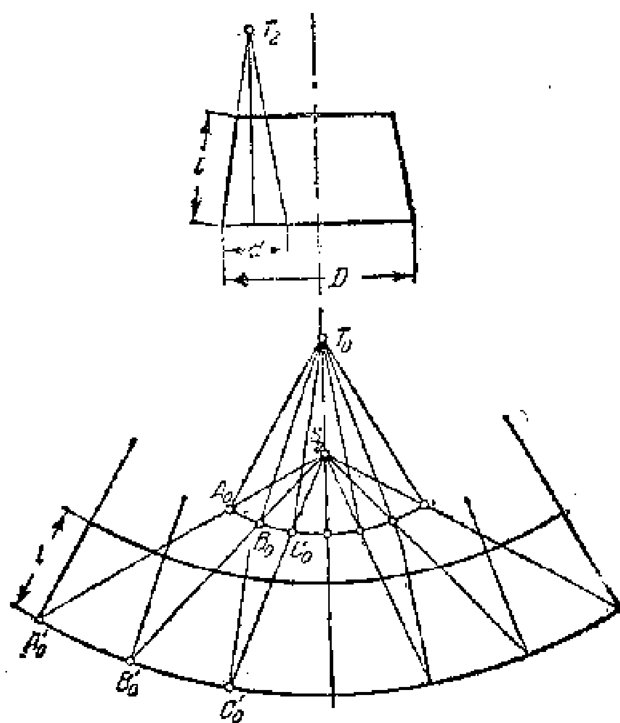


图 405

要能除尽 D，即令 $k=\dfrac{D}{d}$ 为整数。然后作出辅助圆锥的展开图，得扇形的弧 $A_0B_0C_0\cdots\cdots$，作出与该弧相似并以 k 为相似系数的弧 $A_0'B_0'C_0'\cdots\cdots$。这样作出的弧就是截圆锥下底的展开图。过点 A_0'、B_0'、$C_0'\cdots\cdots$ 引直线平行于辅助圆锥展开图上通过对应点 A_0、B_0、$C_0\cdots\cdots$ 的母线。在这些直线上从点 A_0'、B_0'、$C_0'\cdots\cdots$ 起截取母线的长 l，因而求得确定上底展开图的点。用曲线板作出截圆锥两个底圆的展开图，作图便完成了。

§6. 曲面上的线在展开图上的作法

这个问题，以及和它相反的问题，即如果在展开图上给定一条线，要在曲面上作出该线，都具有重要的实际意义。

因为线是点的总和，所以要解决这两个问题，必须建立一种方法，以利用该方法在展开图上求出与曲面上任意点相对应的点，或者相反。

对于所有的直纹面来说，这方法是非常简单的。这就是：过选取(或给定)的点引曲面的直母线，这样，点和母线就联系起来。其次在展开图上求出与所引母线对应的直线，此后，在这条直线上就不难求出与所选取的点相对应的点。

设在曲面上过点 $M(M_1, M_2)$ 引出一母线段 $CC'(C_1C_1', C_2C_2')$，并在展开图上求出与它对应的线段 C_0C_0'。于是，在展开图上就可求出与点 M 对应的点 M_0。点 M_0 分割线段 C_0C_0' 所成的比例与点 M_1 分割线段 C_1C_1' 或点 M_2 分割 C_2C_2' 所成的比例是相等的(参看图 399)。

解逆问题可按相反的顺序进行，因而不必补充说明。

但如果必须在非直纹面上，也就是说，要在明知不可展的曲面上解这两个问题，就不能采用准确的几何方法，而只好用习惯的方法。但要知道，在这种情况下，展开图本身是近似的。

我们用画在图 402 上的环状面的"展开图"这个特例来说明其中一种近似画法。

假设在环状面上给出一个点 $M(M_1, M_2)$，要求在展开图上作出与它对应的点 M_0。作法如下：

在点 M 所在的一瓣曲面范围内过点 $M(M_1, M_2)$ 引旋转曲面的一段纬圆。其次在所引纬圆弧的不变形的投影上，通过它的中点作切线 t_1。然后延长直线 S_1M_1 与 t_1 相交于点 M_1'。此后，在所研究的那一瓣曲面的展开图上（参看图 402），作出与纬圆弧对应的直线段，该线段等于切线段 t_1，并在直线段上标出点 M_0，其位置与点 M_1' 在线段 t_1 上的位置一样。

点 M_0 可看作是与曲面上点 M 对应的点。

复　习　题

1. 什么叫做曲面的展开图？
2. 怎样的曲面是可展的？
3. 可展曲面的哪些性质在其展开图上保持不变？
4. 什么特征可以确定已知曲面是否可展？
5. 怎样的展开图称为精确的展开图，怎样的展开图称为近似的展开图？
6. 试说明作展开图的基本图解法。
7. 圆柱面被倾斜于其轴线的平面所截得的截线，在柱面展开图上变为怎样的曲线？
8. 相交的管子为什么要设计得使它们的交线为平面曲线？

练　习　题

1. 求作截椭圆锥面的展开图（图 406）。

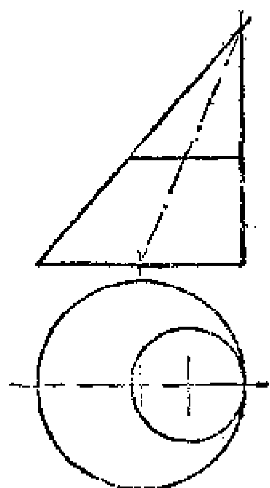


图　406

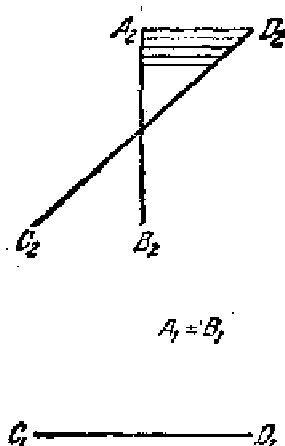


图　407

2. 抛平面由两直导线 AB 和 CD 以及水平的平行导平面给定（图 407）。试作出在四角形 $ABCD$ 内的曲面部分的展开图。

3. 求作如图所示的旋转曲面的展开图(图 408)。

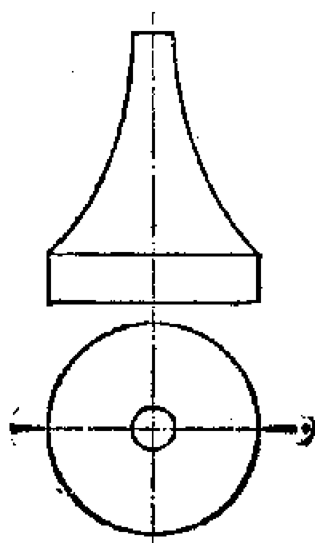


图 408

第十二章　轴测投影

§1. 基本概念和定义·轴测图的可逆性·轴测投影的形式

1. 到现在为止，我们已经研究过由物体的两个投影、三个或更多个投影组成的复合图。现在再提出一个问题：求作既具有直观性同时又具有可逆性的一种单面图，即只包含一个图象(一个投影)的图。

将某形体 Φ(图 409)与三条互相垂直的坐标轴(空间的原坐标系 $Oxyz$) 固定地联系起来。坐标轴要这样配置，使它们的方向与原形体的基本度量方向重合。取线段 e 作为三条坐标轴的公共度量单位。这线段 e 称为原尺度线段或原尺度。

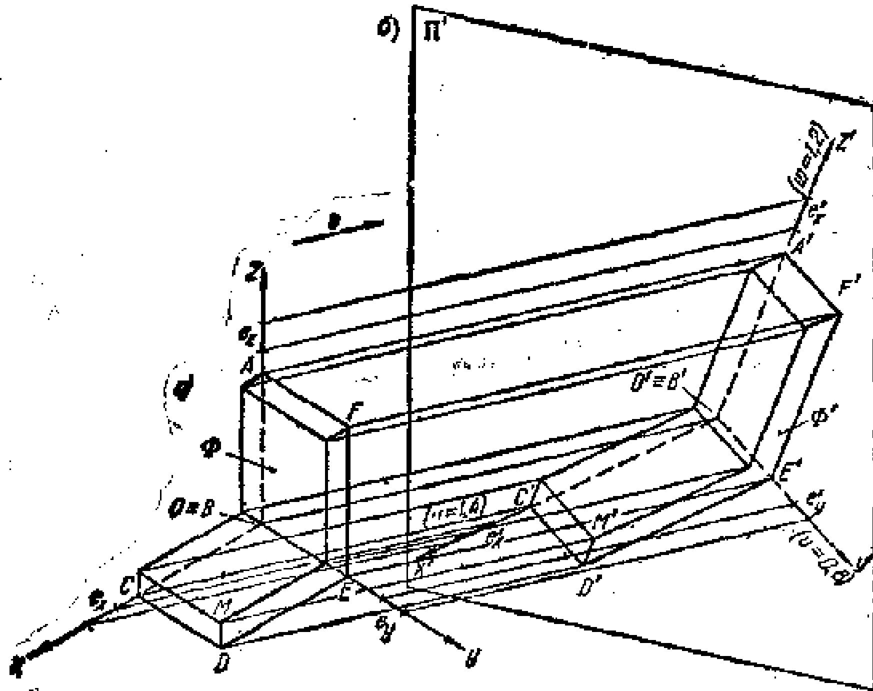


图 409

现在对形体 Φ 的任意一点都可以作出它的坐标折线，并可以用尺度 e 度量这折线的每一段(坐标线段)以及写出点的坐标数值。譬如，对于点 M 我们有：$M(4.5, 3.5, 1)$。同样地有 $D(4.5, 3.5, 0)$等等。

假定所有这些度量都是在原形体中进行的，因此上述坐标称为原坐标。

在每一条轴上截取尺度 e，并分别用 e_x、e_y 和 e_z 表示所得的相等线段。

将形体 Φ 和坐标轴 $Oxyz$一起沿方向 s 投射到某投影面上，这个投影面称为轴测投影面，并用 Π'① 表示。几何元素在这个投影面上的投影称为轴测投影，例如：A' 是点 A 的轴测投影；$M'D'$ 是线段 MD的轴测投影等等。

原坐标轴在平面 Π' 上的投影称为轴测坐标轴。原尺度的投影 e'_x、e'_y、e'_z 称为轴测尺度。

原坐标折线在平面 Π' 上的投影称为轴测坐标折线。例如，$B'C'D'M'$ 是点 M' 的轴测坐标折线。

在一般情况下，原坐标轴 Ox、Oy 和 Oz 对平面 Π' 的倾角各不相同，所以原坐标折线 $BCDM$ 的每一段投射在平面 Π' 上各有不同的变形②。

轴测尺度 e'_x、e'_y 和 e'_z 可用来度量轴测坐标折线。

因为在平行投射时两线段的简比不变，所以轴测尺度 e'_x 将折线的对应段所分成的分数与原尺度 e_x 将原折线的同一段所分成的分数相等。

例如，如果 $x_M=\dfrac{BC}{e_x}=4.5$，那么 $x'_M=\dfrac{B'C'}{e'_x}=4.5$，这里 x_M 和 x'_M 分别是点 M的原横坐标和轴测横坐标。

因此，用轴测尺度量出的轴测坐标在数值上总等于原坐标。

2. 现在来将轴 $O'x'y'z'$ 和点 A'、B'、C' 等复原。

已知在原形中三条轴是互相垂直的，因此我们做一个三条互相垂直的轴的模型 $O^*x^*y^*z^*$。然后，在原形中作出坐标折线 $B^*C^*D^*M^*$、$B^*E^*F^*$ 等等。这时，要使折线各段平行于相应的坐标轴，并且在复原这些坐标折线时要用原尺度 e。显然，在这些条件下，当将坐标系 $O^*x^*y^*z^*$ 与 $Oxyz$ 重合时，我们所复原的点 A^*、B^*、C^* 等等将与原形体Φ的点 A、B、C 等等重合。

所以，我们所作的单面图是具有可逆性的。

3. 设给出轴测轴 $O'x'y'z'$ 和轴测尺度 e'_x、e'_y 和 e'_z (图410)。给出点的原坐标：$A(1, 0, 2)$ 和 $B(3, 3, 5)$，求作线段 AB 的轴测投影。

既然知道用轴测尺度量出的轴测坐标在数值上等于原坐标，因此就可以作出轴测坐标折线 $O'A'_xA'$ 和$O'B'_xB'_1B'$。譬如，坐标折线 $O'A'_xA'$ 的一段 $O'A'_x$ 将包含一个轴测单位 e'_x，而 A'_xA'段则包含两个轴测单位 e'_z (在本例中，坐标折线 $O'A'_xA'$中平行于轴 $O'y'$ 的那一段等于零)等等。用直线连接所得的点 A' 和 B'，就得到线段 AB 的轴测投影 $A'B'$。

4. 现在不难看出，上述方法的特点是：轴测法(метод аксонометрии)③是一种用来作具有可逆性的直观单面图的坐标法。

5. 取坐标面 Oxy、Oxz 和 Oyz 分别作为投影面 Π_1、Π_2和Π_3，然后将点M投射到这些平面上。于是点M_1、M_2和M_3分别是点M的水平投影、正面投影和侧面投影(图411, a)。引出所有可能的连系线，我们就得到六条坐标折线：MM_1M_xO、MM_1M_yO、MM_2M_xO、MM_2M_zO、MM_3M_yO

① 后面各节所谈的都只限于到轴测投影面 Π' 的平行投射。

② 应当注意：在图 409 上所给的是斜投影，因此折线的任何一段的投影的长度可能小于、大于或等于它的原长度。

③ 在希腊文中"ἄξων(аксон)"是轴，μετρέω(метрео)是度量，也就是沿轴度量。

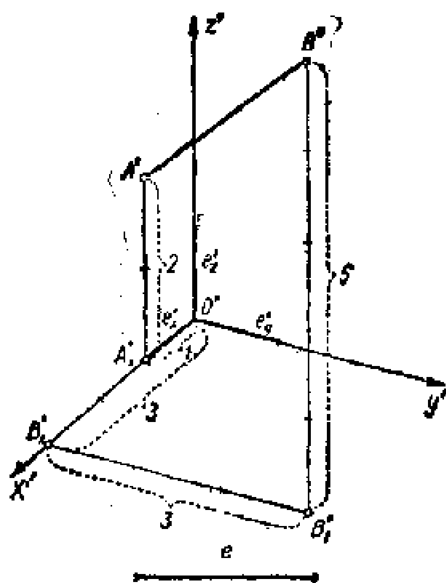


图 410

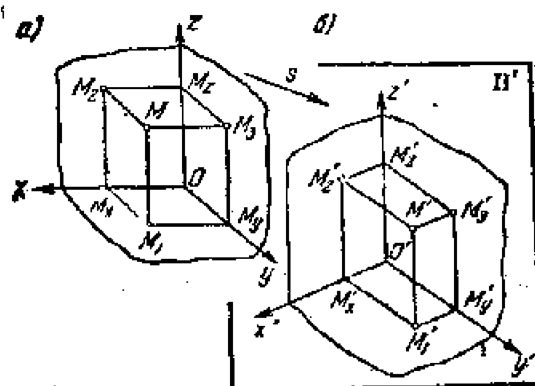


图 411

和 MM_3M_2O, 每条折线都可以确定点M在体系 $Oxyz$ 里的位置。

平行于方向 s 将体系($Oxyz$; M; M_1, M_2, M_3)投射到平面Π'上, 便在平面 Π' 上得到体系($O'x'y'z'$; M'; M_1', M_2', M_3')(图411, б)。这里M' 是原形点M的轴测投影,而点M_1'、M_2'和M_3'是点M_1、M_2和M_3的轴测投影。

几何元素在坐标面上的投影的轴测投影称为次投影(这个术语是 В. И. 库尔久莫夫教授提出的)或底。

不难证明, 如果给出了点的轴测投影和它的一个底, 就可以作出这个点的轴测坐标折线 ①。

由此得出,画在轴测图上的物体,如果任何一点都可以作出它的底,这轴测图就是可逆的。但这时轴测尺度必须预先给定。

图 412 举出一个轴测图, 图中画出所画物体的一些点的底。以后, 只有在必要的时候,我们才指出并标记出所画物体上的点的底。

6. 为了在单面图上获得直观的图象,投射方向不应平行于被投射物体的坐标三面形 $Oxyz$ 的坐标面 Oxy、Oxz 或 Oyz 中的任何一个。

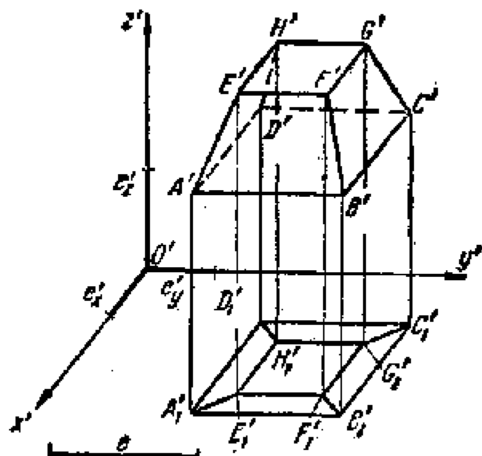


图 412

如果投射方向平行于其中一个坐标面,则这个坐标面(或与它平行的任何平面)的投影退化为一直线, 而使图形失去直观性。譬如在作图 413 时,投射方向平行于坐标面 Oxy, 于是角铁的棱面 $BCDE$(在本例中这个棱面

① 点在体系 $O'x'y'z'$ 里的位置也可用任意两个次投影、三个坐标等确定。

与坐标面 Oxy 重合)的投影 $L'C'D'E'$ 便退化为直线段，角铁上平行于平面 Oxy 的其它棱面也退化为直线段，因而使图象缺少立体感。如果投射方向平行于任一条坐标轴（或者平行于两个坐标面），那就更加没有立体感了，因为这时该坐标轴的投影退化为一个点，而原形体上所有与这条轴平行的直线的投影也都退化为一些点（图414）。

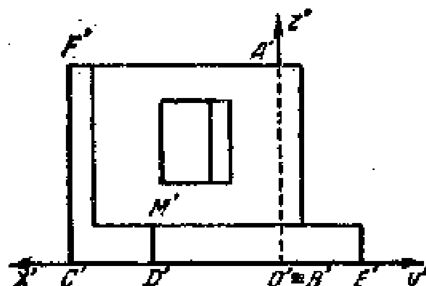


图 413

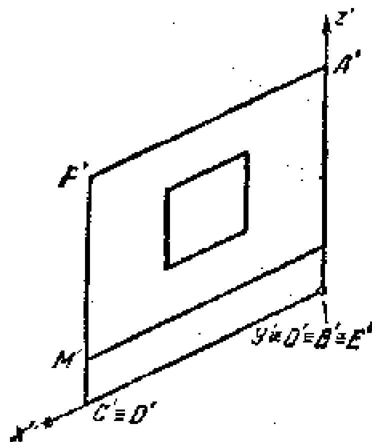


图 414

7. 轴测投影通常分为三测（这时三个轴测尺度都不相同）、二测（这时三个轴测尺度中有两个相等，例如 $e'_x = e'_y \neq e'_z$）和等测（这时三个轴测尺度都相同）①。

这时如果投射方向与轴测投影面 Π' 组成锐角，则投影称为斜轴测投影，如果投射方向垂直于平面 Π'，则所得的轴测投影称为正轴测投影（亦即法向轴测投影）。

§ 2. 波尔克定理·原尺度和轴测投射方向的确定

1. 作轴测图时，必须知道在图上可以怎样选择轴测轴和轴测尺度。

轴测投影的基本定理（波尔克定理）回答了这个问题，该定理断言，图面（Π'）上的轴测轴和轴上尺度的选择可以是完全任意的②。

在平面 Π' 上，通过同一个点作出三条不重合的直线 $O'x'$、$O'y'$ 和 $O'z'$，并分别在线上截取三条任意长度的线段 $O'E'_x = e'_x$、$O'E'_y = e'_y$ 和 $O'E'_z = e'_z$，这时，就可根据上述定理断定，这个给出的图形可以看作是三条互相垂直的并分别在它们上面截有相等的尺度线段 $OE_x = OE_y = OE_z = e$ 的坐标轴 $Oxyz$ 的平行投影。

2. 现在来说明怎样根据轴测尺度找出其原尺度。

设想有三条互相垂直的坐标轴 $Oxyz$ 和一个以点 O 为球心、半径等于某原尺度 e 的球面 Φ（图415）。这球面称为尺度球面，它在轴上截出等于其半径的线段 OX、OY 和 OZ。

坐标面 Oxy、Oxz 和 Oyz 与球面相交于圆 1、2 和 3，圆的半径等于球面的半径。

如果沿着不平行于任一坐标面的某方向 s 将所得的形象投射到平面 Π' 上，我们就得到这个形象的轴测图，同时圆截线 1、2 和 3 投射为椭圆 1′、2′ 和 3′，与这些椭圆外切的椭圆 4′ 构成了平面 Π' 上球面轴测投影的外形线。

① 希腊文 τριμετρος（триметрос）的意义是三维的，δις（дис）是两次的，而 ισος（изос）是相等的。

② 因此，在一般情况下，轴测体系（$O'x'y'z'$；e'_x，e'_y，e'_z）由五个独立参数来确定：即三个轴测尺度和两个轴间角。证明参看第一章 § 7

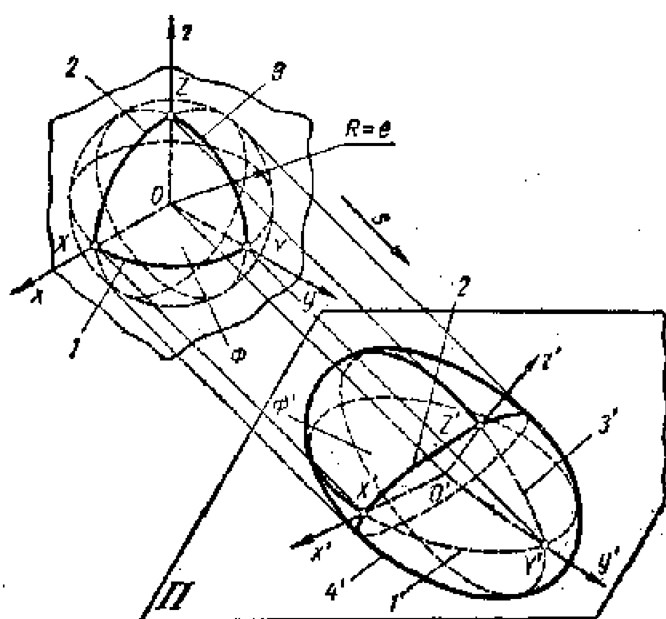


图 415

容易看出，线段 $O'X'$、$O'Y'$ 和 $O'Z'$ 中每一对都是对应椭圆的共轭半直径，它们表现为轴测尺度 e'_x、e'_y 和 e'_z，同时椭圆 $4'$ 的短半轴总等于球面的半径，即等于原尺度 e（因为投射球面的曲面是旋转柱面）。

如果外切于椭圆 $1'$、$2'$ 和 $3'$ 的不是椭圆而是圆，就表示已知的轴测体系是正轴测体系而不是斜轴测体系，因为只有在正投射时球的投影才是一个圆。显然，在这种情况下，原尺度单位 e 等于这个圆的半径。

3．现在来说明怎样根据图形确定轴测投射方向。

不难看出，外形椭圆 $4'$ 的长轴 $A'B'$ 是尺度球面 Φ 上与投射方向 s 垂直的直径 AB 的投影（图 416）（由此 $A'B'=AB:\sin\varphi=2e:\sin\varphi$），而短轴 $C'D'$ 是平行于平面 $\Pi'\equiv\Pi_1$ 的直径 $CD\perp AB$ 的投影（由此 $C'D'=2e$）。同时不难看出，通过球心 O 并平行于投射方向 s 的投射平面 Σ 的水平投影 Σ_1 和轴测投影 Σ' 与长轴 $A'B'$ 重合。

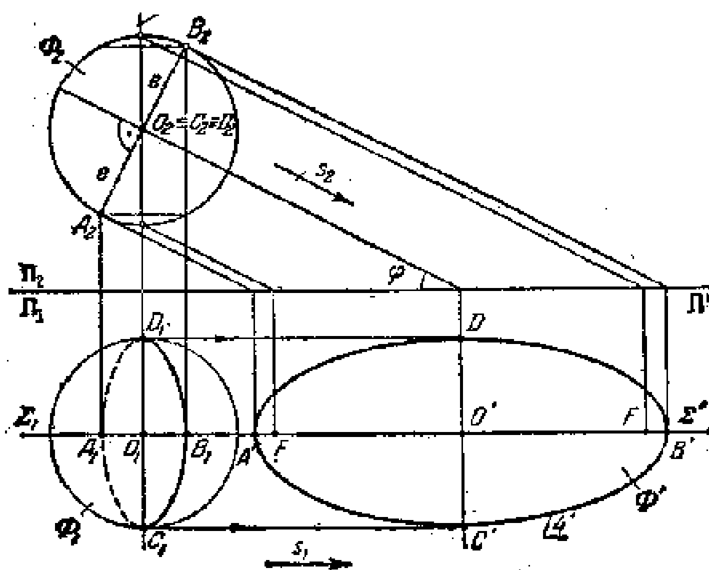


图 416

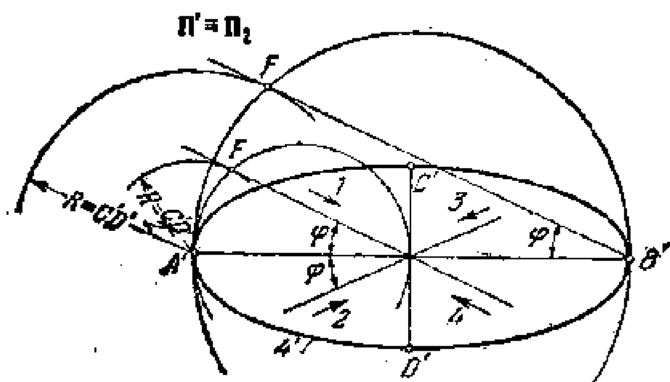


图 417

假设我们有外形椭圆 4′(图 417)。以长轴 $A'B'$ 为直径作圆，然后在圆上从点 A'(或B')以等于短轴 $C'D'$ 的半径向上或向下截取点 E。角 φ 即为所求。如果在半轴上作圆也可得到同样的结果。原形体 Φ 到平面 Π′ 的投射方向一共可以有四种，在图上用箭头 1, 2, 3 和 4 表示。

4. 配置任意两条坐标轴，例如 Oy 和 Oz，使平行于平面 Π′(图 418)，这时在这两条轴上截取的原尺度(以及两轴之间的直角)投射到平面 Π′ 上不会变形。如果投射方向选择得合适，就可使第三个轴测尺度具有**预先给定的任意值**，它可等于、大于或小于 e(但要>0及$<\infty$)；同时，可以使第三条轴测轴具有任意的方向。

由于这时其中一个直立的坐标面(在本例中是平面 Oyz)平行于 Π′，所以这种形式的轴测投影称为正面轴测投影，这时如果三条轴的尺度都相同，则称为正面等测投影。如果第三条轴的尺度不等于原尺度$\left(\text{通常取它等于}\frac{e}{2}\right)$，则称为正面二测投影。如果希望物体上平行于正面的轮廓在图上毫无变形地表示出来，则最好采用正面轴测投影(图 419)。

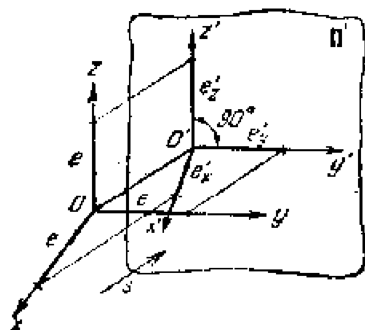


图 418

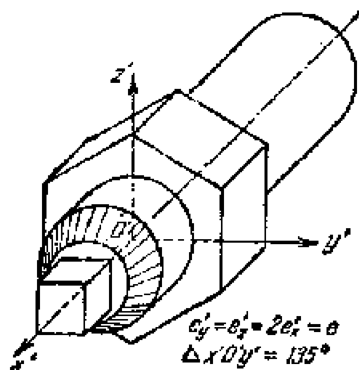


图 419

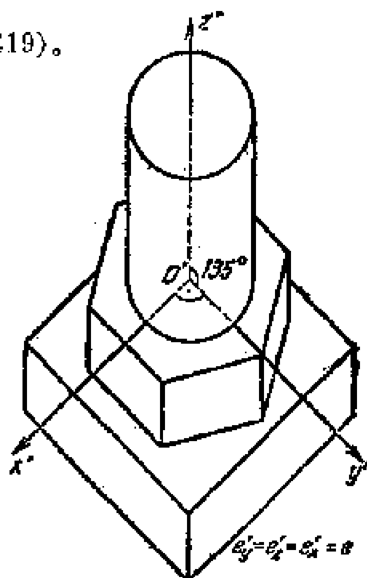


图 420

5. 使一条坐标轴平行于平面 Π′，则在这轴上截取的原尺度 e 投射到 Π′ 上是不变形的。

如果投射方向选择得合适，就可使其余两条轴的轴测尺度具有预先给定的值，它们可等于、大于或小于尺度

e(但要大于 $0.7e$[1], 而小于无穷大)。

图 420 表示出一种很有实际意义的情况, 这时三条轴的轴测尺度都等于原尺度 ($e'_x=e'_y=e'_z=e$)[2]。该情况使得这种轴测投影的作图变得很容易, 而且便于用作速写。因此这种斜等测投影有时称为军用透视。

如果我们保持轴测尺度相等而改变任意两条轴的夹角, 这个体系就对应于另一个未知的原尺度 e, 而彼此相等的轴测尺度在这里就不再等于原尺度了。

§3. 变形系数

1. 前面已指出了采用任意选择的轴测尺度时非常不便, 所以实际上常采用所谓变形系数, 变形系数的应用可使轴测投影的作图大为简化。

轴测尺度与对应的原尺度之比称为变形系数。

如果用 u 表示 Ox 轴的变形系数, v 表示 Oy 轴的变形系数, 以及 w 表示 Oz 轴的变形系数, 就可写成:

$$u=\frac{e'_x}{e_x};\quad v=\frac{e'_y}{e_y}\quad 和\quad w=\frac{e'_z}{e_z},\tag{1}$$

或者, 由于我们采用了 $e_x=e_y=e_z=e$, 则:

$$u=\frac{e'_x}{e};\quad v=\frac{e'_y}{e}\quad 和\quad w=\frac{e'_z}{e}。\tag{2}$$

无论沿哪一条轴测轴的变形系数都可以用任意线段的轴测投影的长度与该线段的原长度之比来表示, 只要原线段平行于所说的轴测轴, 因此:

$$\bar{x}=ux,\quad \bar{y}=vy\ 和\ \bar{z}=wz。\tag{2'}$$

如果知道了轴测尺度, 变形系数就可以确定。实际上, 根据已知的轴测尺度 e'_x、e'_y 和 e'_z 找出原尺度 e 之后, 就可从式(2)找到 u、v 和 w。显然, 如果三个变形系数彼此相等 ($u=v=w$), 则轴测图是等测的; 如果两个变形系数彼此相等(例如 $u=v\neq w$), 则轴测图是二测的; 最后, 如果 $u\neq v\neq w\neq u$, 则轴测图是三测的。

2. 我们来看一看, 如果给出变形系数来代替轴测尺度时, 怎样作轴测图和使轴测图复原。

设 $u=0.75$; $v=1.5$ 和 $w=3$ (图 421)。求作点 A 的轴测图, 这个点的坐标(8, 12, 10)的单位是毫米。用公式 (2′) 计算出轴测折线各段的长: $\bar{x}=u\cdot x=0.75\times 8=6$mm (线段 $O'A'_x$); $\bar{y}=v\cdot y=1.5\times 12=18$ mm (线段 $A'_xA'_1$); $\bar{z}=w\cdot z=3\times 10=30$mm (线段 A'_1A')。以后的作法在图上已经表示得很清楚了。

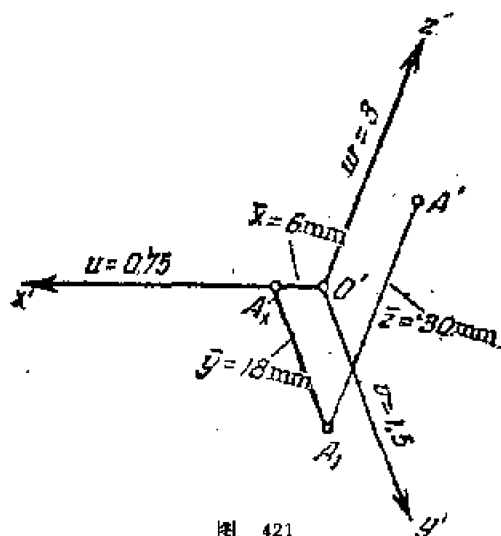


图 421

这个图的复原可以同样简单地完成。

---

① 这可由阿波洛尼亚定理得出。参看阿达玛尔《初等几何学》, 莫斯科, 国家教育出版社, 1938 年版, 第二册, 第 419 页。

② 证明参看 Л. Ф. 切特维鲁新等《画法几何教程》, 莫斯科, 国家技术理论书籍出版社, 1956 年版, 第 365 页。

用带有毫米刻度的普通直尺度量(参看图 421)坐标折线 $O'A'_xA'_1A'$ 的各段。显然，这时得到：$\bar{x}=O'A'_x=6\text{mm}$; $\bar{y}=A'_xA'_1=18\text{mm}$ 和 $\bar{z}=A'_1A'=30\text{mm}$。

采用图上所示的变形系数，就可由公式(2′)找到原坐标折线的各段的长：

$$x=\frac{\bar{x}}{u}=\frac{6}{0.75}=8\text{mm};$$

$$y=\frac{\bar{y}}{v}=\frac{18}{1.5}=12\text{mm};$$

$$z=\frac{\bar{z}}{w}=\frac{30}{3}=10\text{mm}。$$

这个图的复原就完成了。

总之，用变形系数代替轴测尺度并不破坏轴测图的可逆性。

3. 从公式(2)得出：$u:v:w=e'_x:e'_y:e'_z$，亦即变形系数与轴测尺度成比例。这样，给出了轴测尺度、我们就知道变形系数之比，反之，给出了变形系数，就知道轴测尺度之比。

4. 我们知道，轴测尺度是一些互不相关的数值。然而变形系数却不是互不相关的，它们由一定的关系彼此联系着。

现在来研究正轴测投影的变形系数彼此之间是怎样联系的。

定理 正轴测投影的各变形系数的平方和等于2：

$$u^2+v^2+w^2=2。\tag{3}$$

设$(O'x'y'z', e'_x, e'_y, e'_z)$是原体系$(Oxyz, e)$的正轴测投影(图 422)。

用 α、β和γ分别表示轴Ox、Oy和Oz对投影面Π'的倾角，而用α^1、β^1和γ^1分别表示由轴Ox、Oy和Oz与投射方向OO'所组成的夹角(注意，$OO'\perp\Pi'$)。角α^1、β^1和γ^1称为方向角。我们指出，$\alpha^1=90°-\alpha$; $\beta^1=90°-\beta$ 和 $\gamma^1=90°-\gamma$，因为三角形$OO'x$、$OO'y$ 和$OO'z$都是直角三角形。

在解析几何中已证明，三个方向角的余弦的平方和等于1①：

$$\cos^2\alpha^1+\cos^2\beta^1+\cos^2\gamma^1=1。\tag{4}$$

但$\cos\alpha^1=\sin\alpha$; $\cos\beta^1=\sin\beta$和$\cos\gamma^1=\sin\gamma$。

在公式(4)中将角 α^1、β^1、γ^1的余弦代以余角的正弦后，得到：

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1,$$

或

$$(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)+(1-\cos^2\gamma)=1。$$

由此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2。\tag{5}$$

在正投射时，被投射线段的投影对该线段之比等于它们之间的夹角的余弦。因此，

$$\frac{O'E'_x}{OE_x}=\frac{e'_x}{e_x}=\cos\alpha; \quad \frac{O'E'_y}{OE_y}=\frac{e'_y}{e_y}=\cos\beta$$

---

① 不妨重提一下这个结论。正平行六面体(图 423)对角线的平方等于该对角线的三条邻边的平方和：$(OO')^2=(OO_x)^2+(OO_y)^2+(OO_z)^2$。但 $OO_x=OO'\cos\alpha^1$, $OO_y=OO'\cos\beta^1$ 和 $OO_z=OO'\cos\gamma^1$，这里 α^1、β^1 和 γ^1 是直线 OO' 的方向角。经过相应的代换之后，得：$(OO')^2=(OO'\cos\alpha^1)^2+(OO'\cos\beta^1)^2+(OO'\cos\gamma^1)^2$，或化简为 $\cos^2\alpha^1+\cos^2\beta^1+\cos^2\gamma^1=1$。

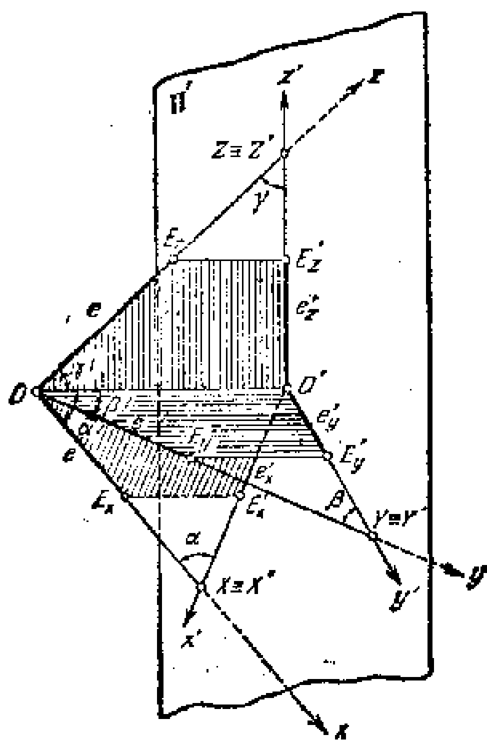


图 422

和 $$\frac{O'E'_z}{OE_z}=\frac{e'_z}{e_z}=\cos\gamma。\qquad(6')$$

由此根据公式(1)

$$u=\cos\alpha;\quad v=\cos\beta \text{ 和 } w=\cos\gamma。\qquad(6)$$

经过相应的代换之后，就得到公式(3)

$$u^2+v^2+w^2=2。$$

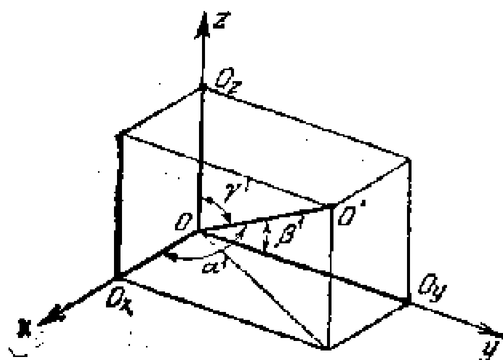


图 423

5. 我们来阐明，正轴测投影变形系数可以有怎样的数值。首先根据公式(6)我们有：

$$0\leqslant u\leqslant 1;\ 0\leqslant v\leqslant 1;\ 0\leqslant w\leqslant 1。\qquad(7)$$

应该指出，如果有一个变形系数等于零(只能有一个变形系数等于零)，就表示对应的原坐标轴对平面Π′的倾角的余弦等于零，亦即该轴垂直于Π′，这时另外两条坐标轴平行于Π′，因而这两条坐标轴的变形系数等于1，而公式(3)在这情况下仍然是正确的(图414)。

如果有一个变形系数等于1，这就表示对应的坐标轴对平面Π′的倾角的余弦等于1，即该轴平行于Π′。在这情况下其余两个变形系数的平方和也等于1，于是我们得到如图413所示的情况。

并不是所有满足条件(7)的三个数都可以是变形系数。

由公式(7)得出

$$0\leqslant u^2\leqslant 1,\ 0\leqslant v^2\leqslant 1,\ 0\leqslant w^2\leqslant 1。\qquad(8)$$

于是根据公式(3)和(8)可以写成：

$$1\leqslant u^2+v^2\leqslant 2;\ 1\leqslant u^2+w^2\leqslant 2;\ 1\leqslant v^2+w^2\leqslant 2。\qquad(8')$$

总之，如果除去极限值，在正轴测投影里任意两个变形系数的平方和大于1而小于2。

这样，给出了两个变形系数[第三个变形系数不能任意给出，因为它要根据两个已知的变形系数由公式(3)定出]之后，还必须检验它们是否满足公式(7)和(8′)。例如，不能给出0.4和0.7这样两个数，因为它们的平方和小于1。

但是，变形系数给出之后，轴测轴就不能任意选取，因为变形系数和轴间角是互相关连的数值，而且在正轴测投影里，给出两个变形系数之后，第三个变形系数和各轴测轴的方向就被确定了[①]。反之，轴测轴给出之后（这时，这些轴应当满足在§4里讨论的条件）就确定了各个变形系数。

这样，正轴测投影由两个参数确定：两个变形系数或两个轴间角（根据已知的一个轴间角和一个变形系数也可以作正轴测投影，不过实际上并不应用）。

6. 对于斜轴测投影，情况有些不同。这时，各变形系数之间的关系应当满足下面的条件：

$$u^2+v^2+w^2=2+\operatorname{ctg}^2\varphi, \tag{9}$$

式中 φ 是投射方向对投影面 Π' 的倾角[②]。

如果取投射方向垂直于平面 Π'，则 $\operatorname{ctg}\varphi$ 变为 0。因此，公式(3)就是公式(9)当 $\varphi=90°$ 时的特殊情形。

总之，在斜轴测投影里，各变形系数的平方和大于 2。

7. 由公式(9)得出，在斜轴测投影里，各变形系数应当满足下列条件：

$$0\leqslant u<\infty;\ 0\leqslant v<\infty;\ 0\leqslant w<\infty^{③}。 \tag{10}$$

实际上，这里也要除去那些极限值。其实，如果让一个变形系数等于零（只能有一个变形系数等于零），则相应的原坐标轴在平面 Π' 上的投影退化为一点，而当三个变形系数都等于无穷大时（仅当投射方向平行于平面 Π' 时才可能有这种情况），图象就失去意义。在特殊情况下，当相应的轴测尺度和原尺度相等时，可能有一个、两个变形系数等于 1（参看图 418）或三个变形系数都等于 1（参看图 420）。在一般情况下，三个变形系数不都等于 1，甚至彼此之间也不完全相等。

但并不是凡满足上述条件的任何三个数都可以是斜轴测投影里的变形系数，任何两个变形系数的平方和还要满足下列的条件

$$1\leqslant u^2+v^2<\infty;\ 1\leqslant u^2+w^2<\infty;$$

和

$$1\leqslant v^2+w^2<\infty。 \tag{10'}$$

任意形式的斜轴测投影实际上很少采用。通常用的斜轴测投影是大家熟悉的形式，如图 419 所示（$u=0.5$，$v=w=1$）。

有时也采用变形系数的比来给定斜轴测投影，如果能够预先看出，在给出的具体情况下，所画物体沿哪一条轴测轴的方向拉伸或沿哪一条轴的方向压缩最为有利，这时采用这种方法最为方便。

§4. “精确的”和“简化的”轴测图

1. 根据给出的变形系数作轴测图时，必须进行一些计算工作。譬如，要在体系 $(O'x'y'z', 0.86, 0.58, 0.96)$ 里作一个相当复杂的物体的轴测投影时，就必须将物体上所有平行于轴 Ox 的尺寸乘以0.86，将平行于轴 Oy 的尺寸乘以0.58，再将平行于轴Oz的尺寸乘以0.96[④]。

为了减轻计算工作，我们将其中一个变形系数简化为 1，而将其余两个作相应换算，这样一来，“不方便的”变形系数就被“方便的”变形系数代替了。

---

① 根据正轴测投影的韦依斯巴赫定理，轴测轴必然是某个三角形各内角的等分线，该三角形的边与变形系数的平方成比例。

② 这个公式的推导，参看格拉祖诺夫和切特维鲁新的著作。

③ 符号“∞”应当理解为：相应的数值随便多大都行，但意义上总是有止境的。

④ 关于应用图解乘法的问题这里不讨论，如果应用这个方法就可省去计算工作（参看本章§12）。

譬如，在刚才提到的例子里，将系数 $w=0.96$ 简化为1。显然，这就要取因数 $m=1.04$，这个因数与 w 的乘积为1。将其余两个变形系数也乘上这个因数（我们将称这个因数为简化系数）后，就得到：$0.86\times1.04\approx0.9$ 和 $0.58\times1.04\approx0.6$。为了与原变形系数（"精确的"变形系数）有所区别，这些新得到的变形系数称为"简化的"变形系数。

简化变形系数用 U、V 和 W 表示。显然

$$U=m\cdot u;\quad V=m\cdot v;\quad W=m\cdot w。\tag{11}$$

因为当变形系数这样改变时，图象的形状并不改变，只是按比例改变它的大小，所以，变形系数的这种改变，相当于以 O' 为中心、以 m 为相似系数的位似变换（相似变换）。这种轴测图称为简化轴测图。

2. 简化系数 m 也称为轴测图的比例[①]。这样，如果比例是用通用的形式标记，则当用简化变形系数0.9、0.6和1分别代替变形系数0.86、0.58和0.96时，在物体的图上图象的比例可标记为：1.04:1。

不难看出，图象的可逆性不依赖于图形是用"精确的"变形系数作出还是用"简化的"变形系数作出，因为只有图象的比例与这个问题有关。

不指明比例（数值的或图解的）的轴测图只能相似地确定物体的形状。

§5. 迹线三角形和变形系数

1. 设将原坐标系 $Oxyz$ 正投射到平面 Π' 上（图424）[②]。用直线段将原坐标轴与平面 Π' 的交点 X、Y 和 Z 连接起来，就得到三角形 XYZ[③]，这个三角形称为迹线三角形。不难看出，$\triangle XYZ\equiv\triangle X'Y'Z'$。

现在来证明，在正轴测投影中，轴测轴的方向与迹线三角形的高线的方向重合。

实际上，平面 Oxy 的垂线 OZ 垂直于该平面上的任何直线。因此 $OZ\perp XY$。但直线 XY 位在平面 Π' 内，于是，当直线 OZ 和 XY 正投射到平面 Π' 上时，这两条直线间的直角仍投射为直角。因此，$O'Z'\perp X'Y'$。同样可证明 $O'X'\perp Y'Z'$ 和 $O'Y'\perp X'Z'$。

2. 直角三面形的任一三角形截线总是锐角三角形。因此，迹线三角形总是锐角的[④]，并且在正轴测投影里坐标原点 O 的轴测投影 O' 总与迹线三角形的垂心重合。（在斜轴测投影里，这种重合是不存在的）。

根据迹线三角形是锐角的这一性质，还可推导出：要使平面上通过一个点的三条直线成为

---

① 比例是指这样一个数，它表示在画图时假想将被投射的物体比原来尺寸增大或减少的倍数。由这个定义得出，"图象的比例"与"变形系数"是完全不同的两个概念，而不能将它们混淆起来。

② 为了使图424更加直观，这些坐标面都看作是不透明的。

③ 因为已假定任一原坐标轴 Ox、Oy 或 Oz 都不平行于 Π'，故迹线三角形一定存在。

④ 这可用下面的理由证实：如果从点 O 对迹线三角形的边 XY 作垂线 OA（参看图424），就得到斜边为 AZ 的直角三角形 AOZ，直角边 OA 和 OZ 的正（轴测）投影 $O'A'$ 和 $O'Z'$ 便与该斜边重合。于是，我们有两个直角三角形 XOY 和 AOZ，并从它们的直角顶点分别作出了对斜边 XY 和 AZ 的垂线 OA 和 OO'。这时点 A 便位在点 X 和 Y 之间，而点 O' 则位在点 A 和 Z 之间。因此，迹线三角形的垂心位在该三角形之内，从几何学知道，只有锐角三角形才具有这个性质。

正轴测投影的轴测轴，其必要的和充分的条件是什么。

假定在平面 Π' 上有三条通过点 O' 的直线 x'、y' 和 z'。每两条直线将平面分成两个角（一对对顶角看作是一个角）。第三条直线在其中一对对顶角之内。由两条直线组成的这个角称为分割角(例如，图 424 上的 $\angle C'O'B'$)，而与它相邻的角将称为非分割角（例如 $\angle X'O'B'$）。于是上面所提到的条件就可表述为：由三条直线中任意两条所组成的每一个非分割角必须是锐角(反之，任意两条已知直线所组成的每一个分割角必须是钝角)。事实上，设 $X'Y'Z'$ 是某一个正轴测体系的迹线三角形，则根据上面所证明的定理：

$$x'\perp Y'Z';\quad y'\perp X'Z';\quad z'\perp X'Y'。$$

由四角形 $O'B'Z'C'$ 得出 $\angle\theta=180°-\eta$。但 $\eta<90°$，因为 $\triangle X'Y'Z'$ 是锐角三角形。因此 $\angle\theta>90°$。于是在轴 x' 和 y' 之间的分割角 θ 是钝角。但角 θ 是角 $X'O'B'$ 的邻角，因此，在轴 x' 和 y' 之间的非分割角 $X'O'B'$ 是锐角。同样，如果研究一下四角形 $O'A'X'B'$ 和 $O'C'Y'A'$，就可以得出这样的结论：在轴 x' 和 z' 以及 y' 和 z' 之间的分割角也是钝角，而非分割角是锐角。

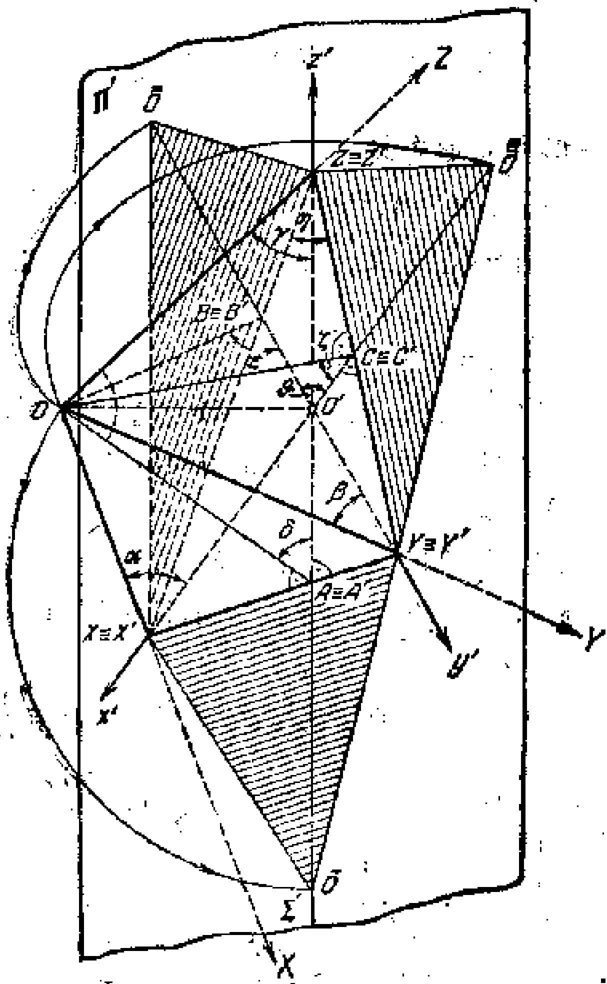
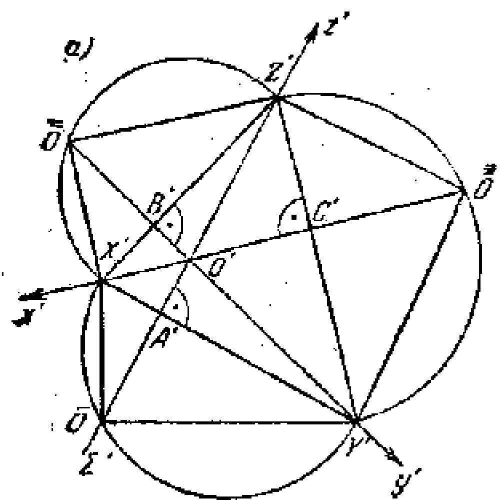


图 424



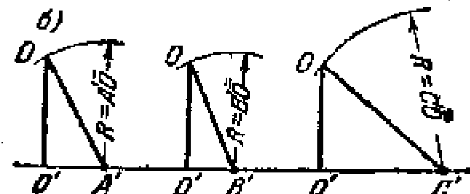


图 425

3. 平面上任意一个锐角三角形都可以作为某一正轴测体系的迹线三角形。同样，还可以确定原坐标轴的位置以及这些轴的变形系数。正轴测投影也可以用轴测轴给出。这时原坐标轴的位置以及这些轴的变形系数也可以确定。现在来说明它们的作法。

以迹线三角形的边 $XY\equiv X'Y'$ 为旋转轴，并使原坐标三面形的棱面 OXY（其轴测投影是 $\triangle O'X'Y'$）与平面 Π' 重合。这时，点 O 在垂直于旋转轴 XY 的平面 Σ 内移动(图 424)。在重合之后点 O 的位置 $\bar{O}$ 可以根据这样的条件找到，即 $\bar{O}$ 应当位在 Σ' 上，而且是一个直角的顶点，这个直角，在重合于平面 Π' 的棱面 OXY 上，呈现实形。因此，点 $\bar{O}$ 必然位在以 $X'Y'$ 为直径的半圆与直线 Σ'（平面 Σ 的轴测投影)的交点上(图 425)。

同样地使三面形的棱面 OXZ 和 OYZ（其投影分别为三角形 $O'X'Z'$ 和 $O'Y'Z'$）重合到平面 Π' 上。

现在，在平面 Π' 上得到原三面形的三个棱面的实形。

利用公式(2')可确定变形系数：

$$u=\frac{X'O'}{X'\bar{O}}=\frac{X'O'}{X'\bar{\bar{O}}};\quad v=\frac{Y'O'}{Y'\bar{O}}=\frac{Y'O'}{Y'\bar{\bar{\bar{O}}}};$$

和

$$w=\frac{Z'O'}{Z'\bar{\bar{O}}}=\frac{Z'O'}{Z'\bar{\bar{\bar{O}}}}。\tag{12}$$

由此看出，如果使坐标三面形的任一个棱面与平面 Π' 重合，就可定出三个变形系数中的两个。譬如，使棱面 OXY 重合后可找出 u 和 v，使棱面 OXZ 重合后可找出 u 和 w，最后，使棱面 OYZ 重合后可找出 v 和 w。

因此，如要根据给出的迹线三角形来确定变形系数，只需使原三面形的一个棱面与平面 Π' 重合，然后用公式(12)找出两个变形系数，第三个变形系数则根据公式(3)确定。

现在不难将原坐标轴复原，因为距离 OO'（参看图 424)是直角三角形 AOO' 的直角边，而这个三角形的斜边 $AO=A'\bar{O}$ 和另一直角边 $A'O'$ 是已知的(参看图 425)，因此 OO' 可以求出。

4. 原坐标轴的复原(或者说确定距离 OO')还可进行如下：从图 424 看到，距离 OO' 是直角三角形 AOZ 中由直角的顶点 O 到斜边 AZ 的高。以高 $Z'A'$ 为直径作半圆(图 426, a)，并自点 O' 引

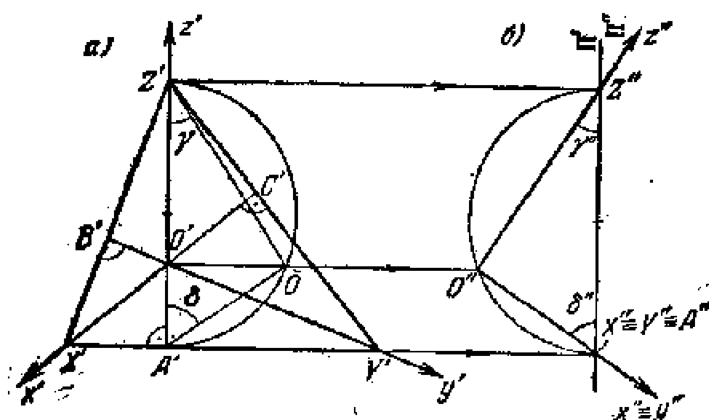


图 426

$Z'A'$的垂线与半圆相交于$\bar{O}$。线段$O'\bar{O}$则等于所求的原坐标原点到轴测投影面的距离。

应该注意，在确定这距离时，可以顺便求出一个变形系数，在本情况下是w。显然，

$$w=\frac{O'Z'}{\bar{O}Z'}=\cos\gamma,$$

式中γ是OZ对平面Π'的倾角$\angle OZ'O'$。还要指出，$\angle OA'O'$是坐标面Oxy对同一平面Π'的倾角δ。

5. 同样还可以利用高$Y'B'$和$X'C'$作图。当利用$Y'B'$作图时，除了作出距离$OO'=\bar{O}O'$之外，还可以找到变形系数$v=O'Y':\bar{O}Y'$、轴OY对平面Π'的倾角β和坐标面Oxz对平面Π'的倾角ε，而当用高$X'C'$作图时，则可以找到变形系数$u=O'X':\bar{O}X'$、轴OX对平面Π'的倾角α和坐标面Oyz对平面Π'的倾角ζ。

为了不使所给的迹线三角形挤满作图线，可将$\triangle OAZ$投射到与$\triangle OAZ$本身平行的平面Π''上，这平面应当布置在图上的合适地方，如图426，б所示。

6. 一个平面及该平面的法线对投影面（法线和平面正投射到这平面上）（参看图424）所成的倾角之间的关系可以表达为：

$$\delta=90^\circ-\gamma;\ \varepsilon=90^\circ-\beta \quad 和 \quad \zeta=90^\circ-\alpha。\tag{13}$$

由公式(13)得出，

$$\cos\delta=\sqrt{1-\cos^2\gamma};\quad \cos\varepsilon=\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

和

$$\cos\zeta=\sqrt{1-\cos^2\alpha}。\tag{13'}$$

或者，根据公式(6)，则得

$$\cos\delta=\sqrt{1-w^2};\quad \cos\varepsilon=\sqrt{1-v^2}$$

和

$$\cos\zeta=\sqrt{1-u^2}。\tag{13''}$$

因此，知道了坐标轴对平面Π'的倾角，就可以用公式(13)定出以该坐标轴为法线的坐标面的倾角，反之，知道了坐标面对平面Π'的倾角，就可以从公式(13)求出该坐标面的任一法线对同一平面的倾角。例如，轴Oz是平面Oxy的法线；

如果知道角γ，就可利用公式(13)算出坐标面Oxy对平面Π'的倾角δ，而不必用图解法求解。

7. **例** 求作正棱柱$ABCDEFGH$的轴测图。棱柱的高$h=45$mm，其矩形的底是：$a\times b=10\times14$mm。正轴测投影的形式由迹线三角形$X'Y'Z'$给定（图427）。

作轴测轴$O'x'y'z'$。我们知道，它们与迹线三角形的高重合，然后确定变形系数，为此，使坐标三面形的一个棱面（例如棱面OXY）与平面Π'重合。于是

$$u=\frac{O'X'}{\bar{O}X'}=\frac{19\text{mm}}{23\text{mm}}\approx0.83 \text{ 和 } v=\frac{O'Y'}{\bar{O}Y'}=\frac{27\text{mm}}{30\text{mm}}=0.9。$$

由公式(3)确定第三个变形系数：$w\approx0.71$。

使棱边AB重合于轴Ox，棱边AD重合于轴Oy和棱边AE重合于轴Oz。根据这个条件，从点O'起在轴$O'x'$上截取线段$A'B'=10\times0.83\approx8$mm，在轴$O'y'$上截取线段$A'D'=14\times0.9=12.6$mm和在轴$O'z'$上截取线段$O'E'=45\times0.71\approx32$mm。以后的作图就无需说明了。

如果用简化变形系数作同一棱柱的轴测图，这个图形就放大到1.11倍。实际上，如果变形系数v（在三个变形系数中最大的一个）简化为1，就有：$m=1:0.9\approx1.11$。于是$U=u\cdot m=0.83\times1.11\approx0.92$，$V=v\cdot m=0.9\times1.11\approx1.0$和$W=w\cdot m=0.71\times1.11\approx0.79$。

因为棱柱的棱面与相应的坐标面重合，所以在图427上没有作出棱柱的次投影。

8. 考察图424和425时，不难看出三角形$X'O'Y'$和$X'\bar{O}Y'$；$X'O'Z'$和$X'\bar{\bar{O}}Z'$；$Y'O'Z'$和$Y'\bar{\bar{\bar{O}}}Z'$是亲似的，亲似轴就是迹线三角形的对应边，而用以建立亲似场Π'和$\bar{\Pi}$；Π'和$\bar{\bar{\Pi}}$；Π'和$\bar{\bar{\bar{\Pi}}}$之间的一对亲似点分别是点O'和$\bar{O}$；O'和$\bar{\bar{O}}$；O'和$\bar{\bar{\bar{O}}}$。利用亲似的特性来作形状复杂而放在一个坐标面（或与它平行的平面）上的平面图形的轴测

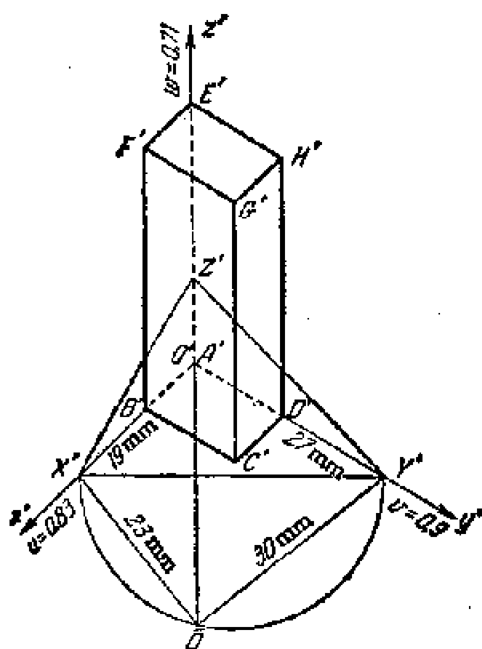


图 427

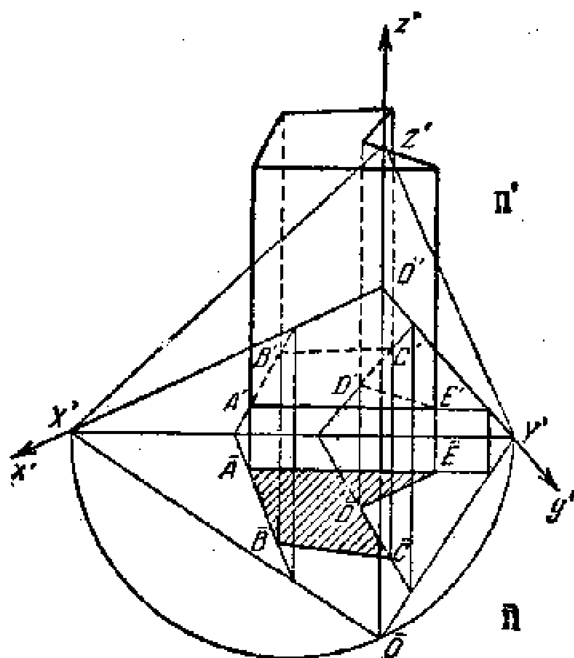


图 428

投影是很方便的，如图 428 所示。图中直线 $X'Y'$ 是亲似轴，点 O' 和 $\bar{O}$ 是亲似点，借助这一对点建立了场 Π' 和 Π 之间的亲似对应，于是 $A'B'C'D'E'$ 和 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ 就是亲似的图形。

9. 既然在正轴测投影里变形系数完全由轴间角确定（在斜轴测里这点则不成立），所以就没有必要将变形系数写在图上，在这情况下，只写出图形的比例就可以完全保证其可逆性。

§6. 轴测图上的定位问题和度量问题

1. 现在来研究与投射方向平行的直线 r 的轴测图。

这种直线的轴测投影退化为一点 r'，它的次投影则平行于轴测轴，即 $r'_1 \parallel O'z'$；$r'_2 \parallel O'y'$ 和 $r'_3 \parallel O'x'$（图 429）。

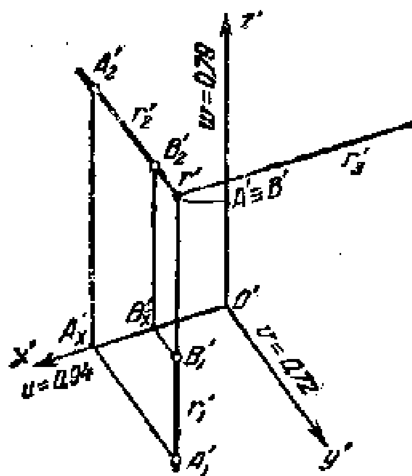


图 429

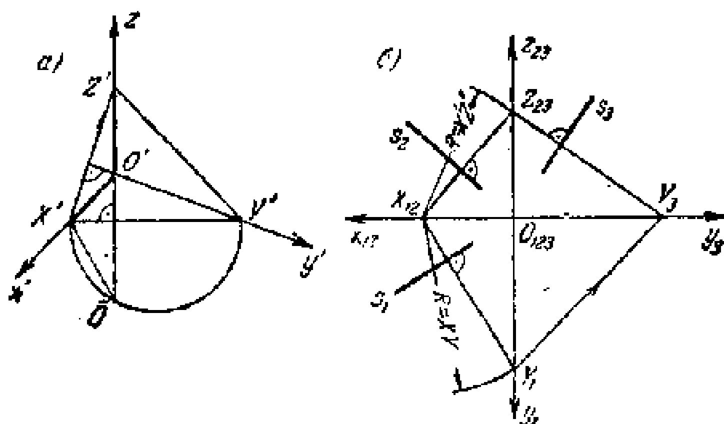


图 430

实际上，因为三角形 AOZ 的平面垂直于平面 Oxy（参看图 424）；所以直线 OA 是投射线 OO' 在平面 Oxy 上的投影，它的轴测投影 $O'A'$ 是投射线 OO' 在平面 $O'x'y'$ 上的次投影。由于平行直线的投影也是平行的，因此，平行于投射方向的任何直线在平面 $O'x'y'$ 上的次投影平行于轴测轴 $O'z'$。同样可以证明，投射线的另外两个次投影分别平行于轴 $O'x'$ 和 $O'y'$。

2. 我们来作与轴测投射方向平行的任意一条直线的复合图，其目的稍后就会知道。

设已知轴测轴 $O'x'y'z'$（图 430）。先作出迹线三角形 $X'Y'Z'$。如我们知道，这个三角形的边在轴测图和复合图上都表现为实长。据此，根据原坐标在复合图上作出迹线三角形的一个顶点的投影后[这作法是很简单的，因为迹线三角形的任一个顶点总有两个坐标等于零，例如$(x, 0, 0)$是顶点 X' 的坐标，而不等于零的坐标也容易用作图法找出，如图 430 所作的那样，这里 $x = X_{12}O_{123} = \bar{O}X'$]，自所得的点 X_{12} 以 $X'Y'$ 之长为半径在轴 O_y 上截取一点 Y_1，而以 $X'Z'$ 之长为半径在轴 O_z 上截取一点 Z_{23}（如果 $Y_3Z_{23} = Y'Z'$，则可以认为作图是准确的）。垂直于平面 XYZ 的任一直线，例如 s，在复合图上便确定一条平行于轴测投射方向的直线(图 430, $б$)。

因此，如果在复合图上给出了轴测投射方向的投影，就可以作出由所给方向确定的正轴测体系迹线三角形的投影，反之，如果在复合图上给出了迹线三角形的投影，就可以作出由所给迹线三角形确定的轴测投射方向的投影。这些作法使得很容易将轴测图变为复合图，或者将复合图变为轴测图。这些方法也可用来根据给定的方向作正轴测投影。

3. 现在来研究直线与平面相交这一基本定位问题在轴测图上的解法。

在图 431 上直线 g 和$\triangle ABC$ 由其轴测投影和次投影给出。为了找出点 $M = g \times ABC$ 的轴测投影 M'，我们过直线 g 作辅助投射截平面 $\Sigma(\Sigma_1' \equiv g_1')$。该截平面交 ABC 于直线 KL。由此 $M' = K'L' \times g'$。

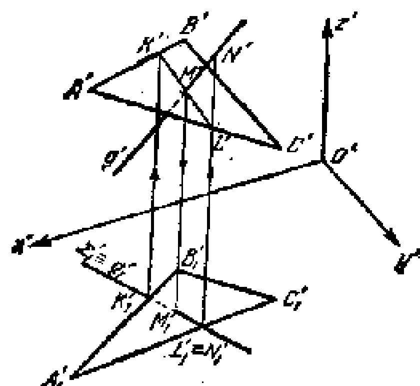


图 431

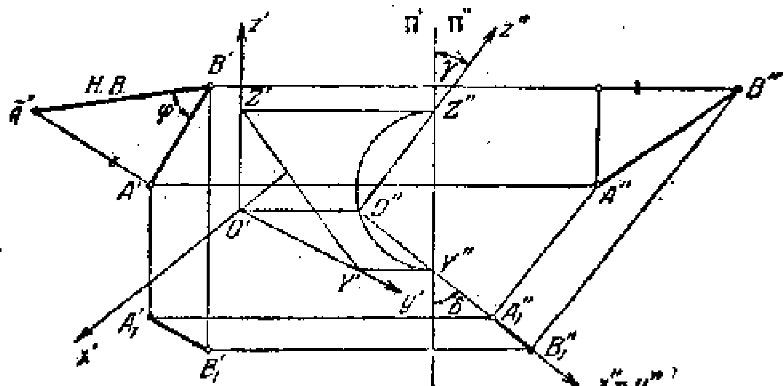


图 432

4. 在轴测图上解度量问题则比较复杂，特别是在斜轴测投影里。作为一个例子，试研究怎样求在正轴测图上给出的直线段$(A'B', A_1'B_1')$的实长和该线段对轴测投影面的倾角的实际大小(图 432)。

将线段$(A'B', A_1'B_1')$和坐标轴一起投射到平面 Π'' 上，平面 Π'' 垂直于 Π' 并平行于其中一条轴（例如 O_z），为此，先给出了迹线三角形[①]。我们就得到由线段的两个正投影：平面 Π' 上的 $A'B'$ 和平面 Π'' 上的 $A''B''$ 组成的复合图。现在可以根据线段的两个已知的正投影：平面 Π' 上的正面投影和平面 Π'' 上的侧面投影，应用我们所熟悉的任一方法，例如图 432 所示的三角形法，找出直线段的实长和它的倾角，图中线段 $\bar{A}'B'$ 等于所求线段 AB 的实长。

§ 7. 圆的正轴测投影

1. 大家知道，圆的正投影在一般情况下是椭圆，椭圆的长轴等于圆的直径 d，短轴等于

① 只要象图 432 所作的那样给出迹线三角形中与轴 $O'z'$ 和 $O'y'$（或 $O'z'$ 和 $O'x'$）相交的一条边就够了。

$d\cos\varphi$，这里 φ 是圆所在的平面对投影面的倾角，并且这椭圆的长轴总垂直于圆所在平面的法线在该投影面上的投影。

因为正轴测投影就是物体在轴测投影面 Π' 上的正投影，所以，在正轴测投影里，作为圆的投影的椭圆，其长轴总等于圆的直径 d，轴的方向则垂直于这个圆所在平面的法线的轴测投影，而短轴与这法线的投影平行且等于 $d\cos\varphi$，这里 φ 是圆所在的平面对轴测投影面的倾角。

现在来研究几个例子。

例 1 求作位在坐标面(或平行于它的平面)上的圆的轴测投影①。

设给出分别位在平面 Oxy、Oxz 和 Oyz 上的圆 A、B 和 C。在每一个圆中引两条互相垂直并平行于相应坐标轴的直径：在圆 A 中引 $1—1 \parallel Ox$ 和 $2—2 \parallel Oy$，在圆 B 中引 $1—1 \parallel Ox$ 和 $3—3 \parallel Oz$ 及在圆 C 中引 $2—2 \parallel Oy$ 和 $3—3 \parallel Oz$。

上述直径的轴测投影将平行于相应的轴测轴，即 $1'—1' \parallel O'x'$、$2'—2' \parallel O'y'$ 和 $3'—3' \parallel O'z'$，而跟它们对应的各对线段就是椭圆 A'、B' 和 C' 的共轭直径(图 433)。

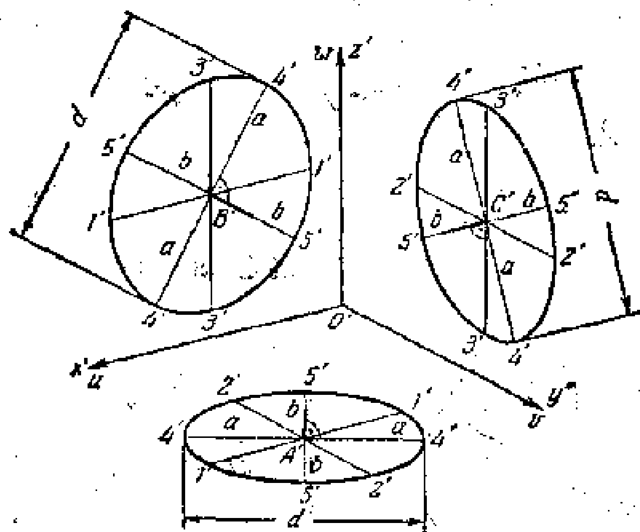


图 433

投射时，平行于轴 Ox 的直径 $1—1$ 的变形系数等于 u，平行于轴 Oy 的直径 $2—2$ 的变形系数等于 v，最后，平行于轴 Oz 的直径 $3—3$ 的变形系等等于 w。

因此，椭圆 A'、B' 和 C' 就不难根据它们的共轭直径而作出。因为共轭直径的方向和大小都已经知道。

但是，如果知道了椭圆轴，椭圆就可以更准确地作出。

如上所述，椭圆的长轴 $4'—4'$ 垂直于相应的轴测轴，而短轴 $5'—5'$ 则与该轴测轴平行。余下的是求出短轴的大小。

将圆 C 与坐标轴 $Oxyz$ 一起投射到垂直于 Π' 且平行于轴 Ox 的平面 Π'' 上(图 434)。在这情况下，坐标面 Oyz 在平面 Π'' 上的投影退化为直线 $O''y'' \equiv O''z''$，圆 C 在 Π'' 上的投影也就重合于该直线。

① 以后，对位在坐标面上的或位在与坐标面平行的平面上的相应几何图形将不加以区别。

这样，问题就变为在复合图上作圆的投影，这个圆所在的平面垂直于一个投影面（在本例中垂直于Π''）。这个问题我们是会解的（参看第四章§5，因此对图 434 上的作图不必作进一步的说明）①。为了找出椭圆A'和B'的短轴，应分别平行于轴 Oz 和 Oy 作垂直于平面Π'的辅助平面。现在每一个椭圆 A'、B' 和 C' 都可以根据八个点作出，这对于画椭圆来说是足够的了。短轴的大小也可根据公式(13)确定。

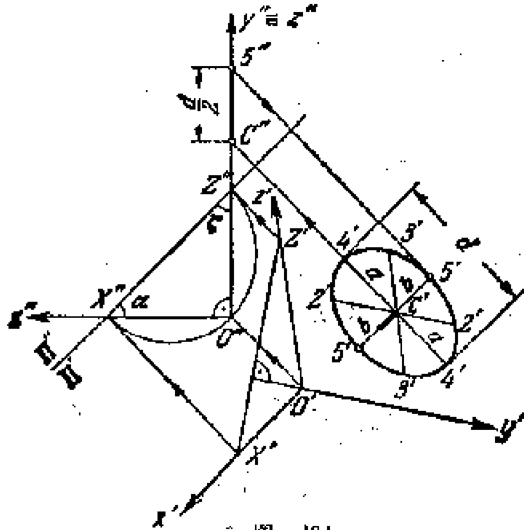


图 434

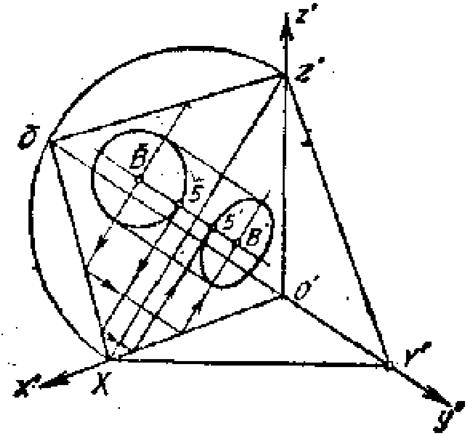


图 435

椭圆轴也可利用场 Π' 和场$\overline{\Pi}$的亲似性质来确定(图 435)。

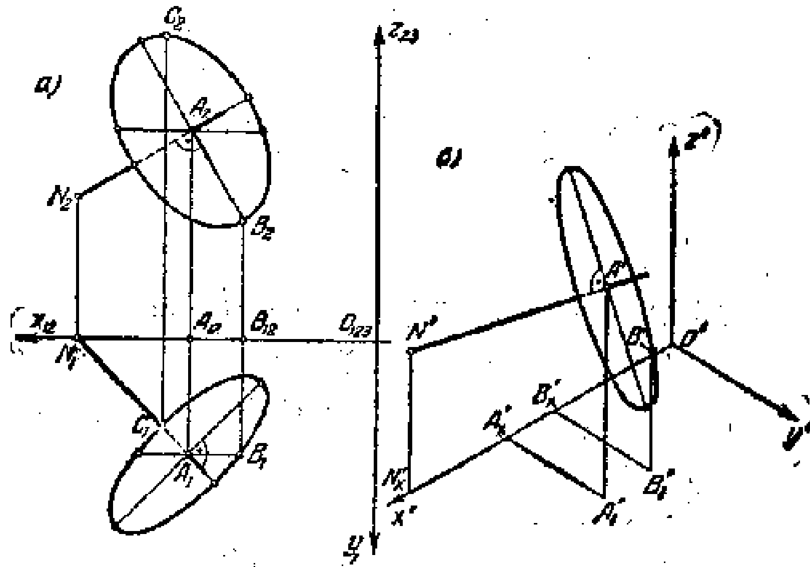


图 436

例 2 求作位在一般位置平面上的圆的轴测投影(图 436)。

在这情况下，借助圆所在平面的法线和圆上的任一点来作圆的轴测投影是最方便的。这样一来，问题可归结为根据长轴和椭圆上的一个点来作椭圆。在图 436 上是用点 B 作图，通过这个

① 图上只将圆的一半（线段 $C''5''$）投射到平面 Π'' 上，这对解题来说是足够了。从这个图还可以看到，短轴同时确定了被投射的圆所在平面的坡线的轴测投影，在本例中就是平面 Oyz 的坡线的轴测投影。

点的直径是正平线，因此与圆上任意给定的点（例如点 C）比较起来，它的坐标可以作得更准确。

因为在图 436 上给出的是简化轴测投影，所以长轴等于 md。

圆所在的平面可以平行于或垂直于轴测投影面。这时，圆在平面 Π' 上就投射为与圆本身全等的一个圆，或投射为一直线段，其长度等于 d 或 md，这取决于图形是用“精确的”变形系数还是用简化的变形系数作出。

例3 图 437，a 给出了一个零件的投影，在该投影的外形线上的点 A、B、C、D、E 处，有一些圆弧跟圆弧是彼此光滑连接的，有一些圆弧则跟直线彼此光滑连接。

在轴测图上（图 437，$б$），圆弧已变换为椭圆弧，这些椭圆弧或直线也在点 A'、B'、C'、D'、E' 处光滑地连接起来。

图 437

图 438

2. 作任意形状的平面曲线的轴测投影，最方便的是利用辅助平行弦。

这个方法的应用如图 438 所示。图中平面曲线 AB 与任意直线 p 相交，然后利用一组水平线以确定曲线上的点 C、D、E、F 对这直线的位置，选择这些点时要使得它们能够最清楚地表达出曲线的特征（图 438, a）。

先利用点 1 和 7 的坐标作出截线 p 上的线段 $1—7$ 的轴测投影 $1'—7'$，然后将 $1'—7'$ 分为若干段，使各段间的比例与各点 $1\cdots\cdots7$ 分线段 p 的比例相同（图 438, $б$）。

此后，作其中一条弦（例如作最长的弦 $F5$）的轴测投影，并过点 $1'$、$2'$、$4'$、$6'$ 引直线平行于 $F'5'$。定出弦的变形系数 n，显然，这变形系数等于比 $F'5':F_15_1$（F_15_1 是弦 $F5$ 的实长），曲线上其余的点的轴测投影便可找出。譬如，截取平行于 $F'5'$ 且等于 $(1_1A_1)n$ 的线段 $1'A'$，就找到曲线上的点 A'。

3. 如果应用图解方法求弦的实长乘以 n 的积，就可以避免计算工作。为此（图 438, $в$）可作出比例尺度图，它的水平直角边等于最长的那条弦 F_15_1，而铅垂的直角边等于同一条弦 $F5$ 的轴测投影 $F'5'$。现在，如果沿水平线从点 F_1 起截取线段等于另一条弦（例如 $6B$）的实长，并通过点 B 引铅直线与直线 F_15' 相交，就得到弦 $6B$ 的轴测投影 $6'B'=BB'$ 的长度。

4. 空间曲线的轴测投影通常是根据曲线上一些点的坐标作出的，选择这些点时，应该选择最能清楚地表示出曲线特征的点。图 439 表示一圈螺距固定的圆柱螺旋线的轴侧投影的作法，螺旋线的轴与轴 Oz 重合。

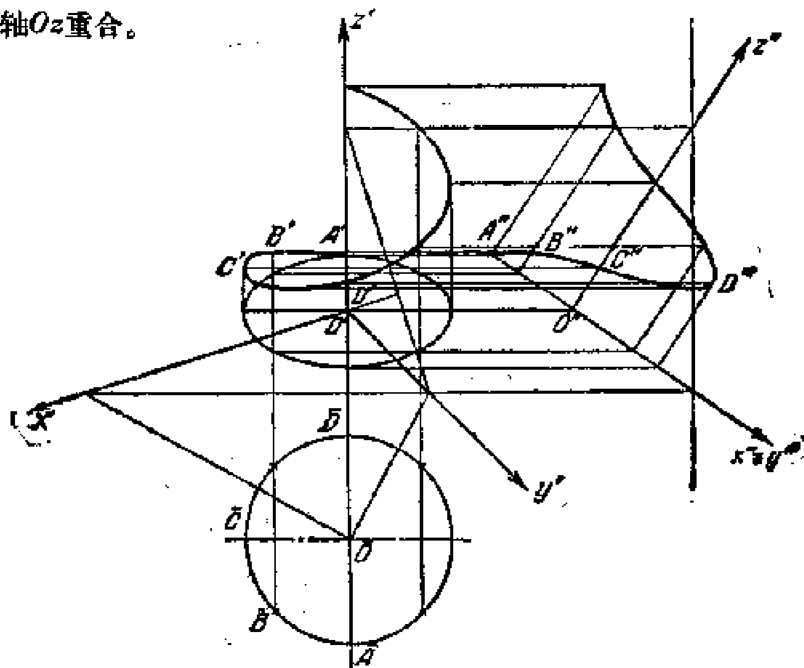


图 439

形成螺旋线的点的轴向位移可从这条曲线在平面 Π″ 上的投影量出，平面 Π″ 垂直于 Π′ 且平行于 Oz，但角位移就要在坐标面 Oxy 上量出。因此要将这坐标面与 Π′ 重合。

§8. 标准的轴测投影体系

1. 在这以前，我们给出了一般的轴测投影体系，即斜轴测投影中的（$O'x'y'z'$, e'_x, e'_y, e'_z）和正轴测投影中的（$X'Y'Z'$）。在实践中主要采用三种特殊形式的轴测投影，这些形式的轴测投影图是很直观的，作图也很简单。采用这些体系时，不需要再计算轴间角和变形系数，因为它们已载于国家标准（参看 ГОСТ 3453—52 附录）。所以这三种特殊形式的轴测投影也称为标准的轴测

投影。它们是：1) 正等测投影；2) 正二测投影，其变形系数的比等于0.5:1:1；3) 正面(斜)二测投影，其变形系数的比也等于0.5:1:1。

2. 正等测投影[①]就是将原坐标轴系统放置在使轴Ox、Oy和Oz对平面Π'的倾角全都相等的位置上($\alpha=\beta=\gamma$)(参看图 424)所得到的轴测投影。于是，根据这个条件，$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$，因而$u=v=w$。根据角$\alpha$、$\beta$和$\gamma$相等，可以得出三个轴间角相等以及迹线三角形为等边三角形(图440)。由公式(3)应该有：$3u^2=2$；由此$u=v=w=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx0.82$。当一个变形系数简化为1时，其余两个变形系数也简化为1。于是$U=V=W=1$。简化系数m由条件$um=1$确定；由此$m\approx1.22$。

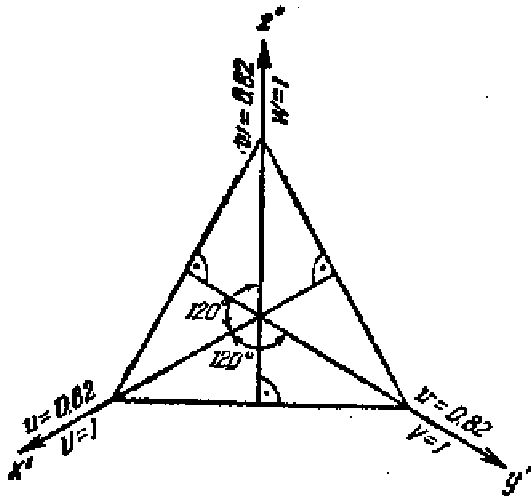


图 440

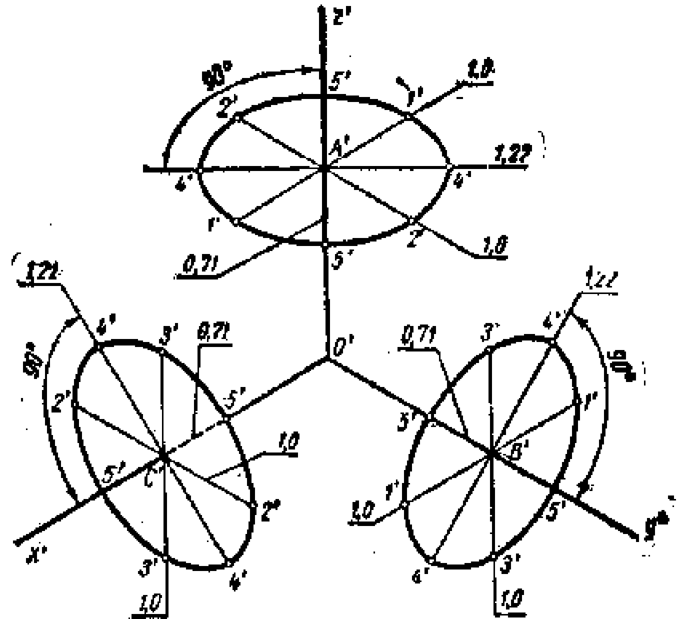


图 441

因此，在正等测投影里采用简化变形系数时，图象就放大了约1.22倍(M1.22:1)。

根据原坐标轴对平面Π'的倾角相等，可以得出坐标面Oxy、Oxz和Oyz对同一平面Π'的倾角也相等。

因此，作为平行于坐标面的圆的投影的椭圆，它的短轴对长轴之比都相同，即$b:a=0.58:1$。实际上，由公式(13)得出：

$$b=d\sqrt{1-u^2}=d\sqrt{1-\frac{2}{3}}\approx0.58d,$$

如我们所知，长轴总等于d。

当采用简化变形系数时，分别有：$a=1.22d$和$b=0.58d\times1.22=0.71d$。

在图 441 中给出了平行于坐标面的三个圆A、B和C的投影。在引出线上，写出了作"简化的"等测投影时圆A、B和C的相应直径的变形系数。

① 正等测投影只有一种，而斜等测投影却有无数种，因此不要把这两种投影混淆起来。

对坐标面处于投射位置或一般位置的圆，§7中所述作图法仍然有效。

轴测投射方向 s 的复合投影和轴测平面 Π′ 的迹线对各坐标轴的投影都成 45°角(图 442)。

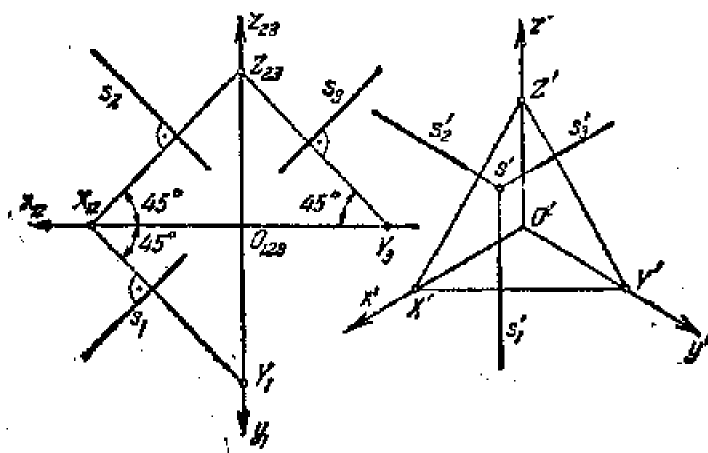


图 442

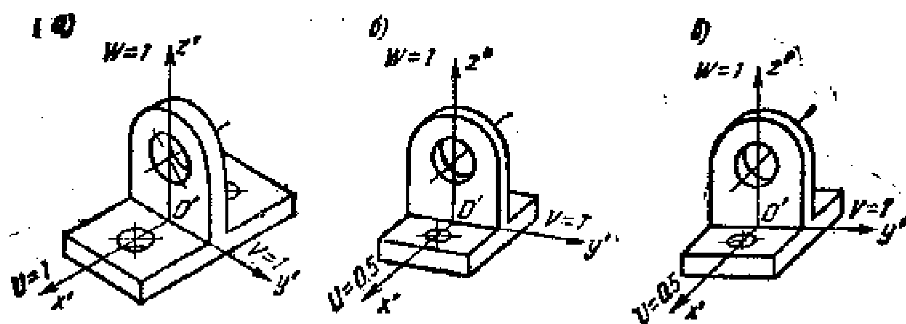


图 443

在图 443, a 上给出了一个用简化的正等测投影作出的零件图。

3. 标准的正二测投影就是使两条坐标轴(通常是 Oz 和 Oy 或 Oz 和 Ox)对平面 Π′ 的倾角相等，而使第三条坐标轴倾斜成这样：使它的变形系数比其它两条轴的变形系数小一半，例如使 $v=w$ 和 $u=0.5v$①，这时所得到的轴测投影。

由公式(3)我们有：$\frac{v^2}{4}+v^2+v^2=2$，或 $9v^2=8$。

由此

$$v=\left|\frac{2\sqrt{2}}{3}\right|\approx 0.94;\quad w=v\approx 0.94$$

和

$$u=0.5v=0.47。$$

由于两条坐标轴对平面 Π′ 的倾角相等(在现在的情况下是轴 Oy 和 Oz 的倾角 β 和 γ)，因此，迹

① 具有上述比例的变形系数的斜二测体系有无限多，但在正轴测投影里则只有一种(当然，正二测体系也可以有无限多，但它们有另外的变形系数的比例)。

线三角形是等腰的。

实际上(参看图 424)，$\triangle OO'Z'=\triangle OO'Y'$(直角边 OO' 共有，锐角 β 和 γ 相等)。因此 $OZ'=OY'$。但这时直角三角形 $OY'X'$ 和 $OZ'X'$ 相等(直角边 OX' 共有，另一直角边 OZ' 和 OY' 相等)，由此 $X'Z'=X'Y'=Y'Z'$。

现在来求轴间角。因为$\triangle X'Y'Z'$是等腰的，所以 $Y'C=CZ'$。于是 $OC=CZ'$，并且$\triangle O'C'Z'$是“半正方形” OCZ 的正投影。如果取相等的直角边 OY 和 OZ 作为单位线段，则根据勾股定理①得到:

$$(Y'Z')^2=(OY)^2+(OZ)^2=1^2+1^2=2,$$

或

$$Y'Z'=\sqrt{2}。$$

于是 $CZ'=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $O'Z'=OZ\cdot\cos\gamma=OZ\cdot w=\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

从直角三角形 $O'CZ'$(图 444)有:

$$\sin\varphi=\frac{CZ'}{O'Z'}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3}{4}$$

图 444

由此 $\varphi\approx48°35'$，$2\varphi\approx97°10'$ 和 $\psi=180°-\varphi\approx131°25'$。

如果将轴 $O'z'$ 铅直放置，如果 445, a 所示，则轴 $O'x'$ 和 $O'y'$ 与水平线分别构成角度41°25′和 7°10′。

角 7°10′ 和 41°25′ 可以根据它们的正切作出$\left(\text{取 } \mathrm{tg}\,7°10'=\frac{1}{8} \text{ 和 } \mathrm{tg}\,41°25'=\frac{7}{8}\right)$而无需使用量角器(图 445, б)。

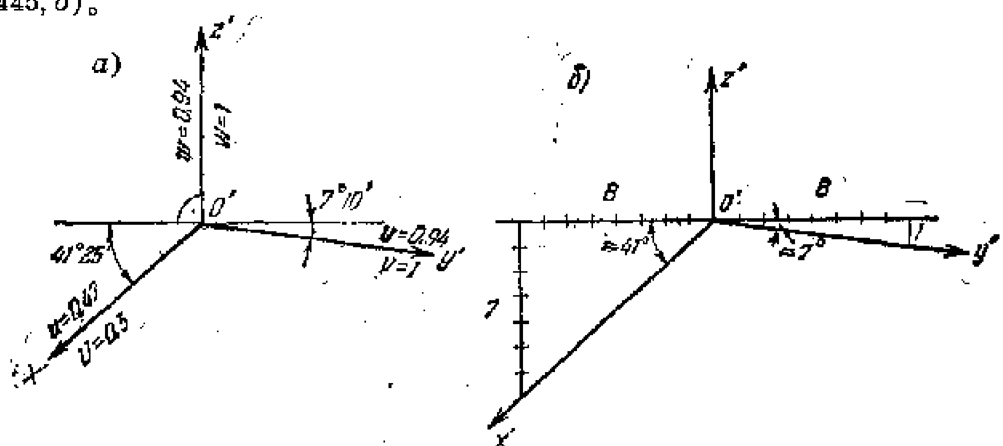


图 445

在图 446 上给出了平行于坐标面的圆 A、B和C。根据轴 Oy 和 Oz 对平面 Π′ 的倾角相等，可以得出坐标面 Oxy 和Oxz 对Π′ 的倾角相等。因此，作为圆 A 和 B 的投影的椭圆 A' 和B'，有着相同的长短轴比例，即$a:b=1:\frac{1}{3}$。

① 原文为毕达哥拉斯定理——译者注。

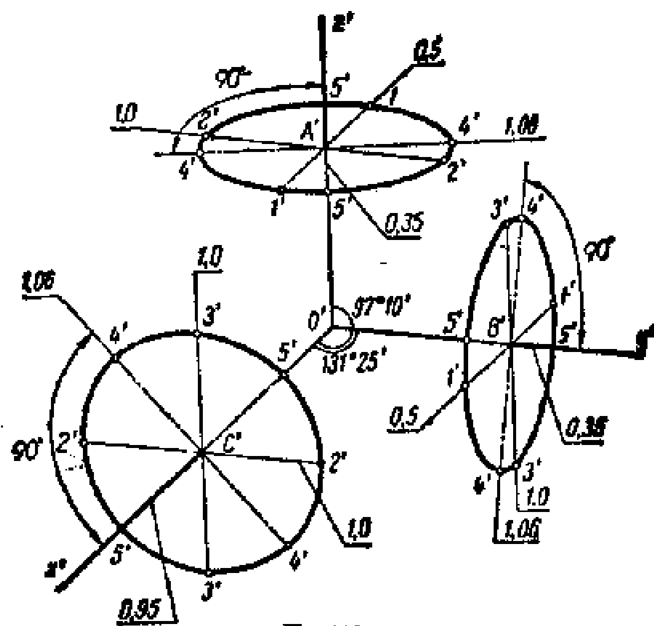


图 446

实际上，对于坐标面 Oxy（参看图424）我们有 $\delta=90°-\gamma$。由此 $\cos\delta=|\sqrt{1-w^2}|$。但 $w^2=\frac{8}{9}$，因此 $b=d\cdot\cos\delta=d\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{d}{3}$。对于平面 Oxz 也得到同样的结果。平行于坐标面 Oyz 的圆的投影是椭圆 C'，其长短轴之比等于1:0.9。事实上，根据公式(13)有：

$$b=d\cdot\cos\zeta=d\sqrt{1-u^2}=d\sqrt{1-\frac{2}{9}}\approx 0.9d.$$

在实际采用标准的正二测投影时，通常应用简化的变形系数，这时图象放大到 1.06 倍（M 1.06:1）。

实际上，由条件 $m\cdot v=1$ 得 $m=1:v=1:0.94\approx 1.06$。由此 $V=W=1$ 和 $U=m\cdot u=1.06\times 0.47\approx 0.5$。

相应地，对于长短轴比例为 3:1 的椭圆，我们有：长轴 $2a=1.06d$，短轴 $2b=2a:3\approx 0.35d$。对于长短轴比例为 1:0.9 的椭圆，则有：长轴 $2a=1.06d$，短轴 $2b=0.9\times 2a\approx 0.95d$。

图 446 上表示出作"简化的"标准正二测投影时圆 A、B 和 C 的相应直径的变形系数。

如果对平面 Π' 的倾角相等的轴是 Ox 和 Oz，则椭圆 B' 和 C' 的位置对调。

在图 447 上给出了标准正二测投影的迹线三角形和投射光线 s 的复合投影。

在图 443, б 上用标准正二测投影画出了与图 443, a 上相同的零件。

4. **正面斜投影**的构成方法我们早已熟悉了（参看图 418）。那时就指出，如果将坐标面 Oyz（或 Oxz）平行于平面 Π' 放置，则轴 $O'y'$ 和 $O'z'$（或 $O'x'$ 和 $O'z'$）的变形系数等于1。同时又曾指出，可以在图上给轴 $O'x'$（或$O'y'$）以完全任意的方向（当然与其它两条轴不重合）和任意的变形系数。通常取轴 $O'x'$（或 $O'y'$）的方向与角 $y'O'z'$（或 $x'O'z'$）的等分线方向相同，而取变形系数 u（或 v）等于 0.5。在制图标准里也建议用这种形式的正面斜二测投影。

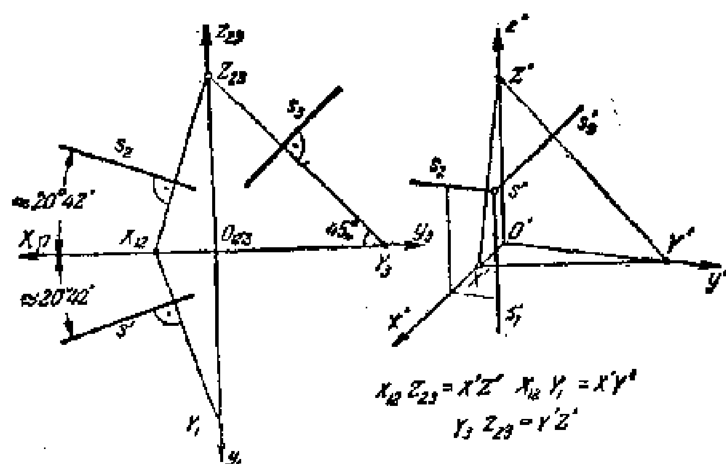


图 447

现在来求这种形式的轴测投影的投射方向。由公式(9)我们有：$0.5^2+1^2+1^2=2+\mathrm{ctg}^2\varphi$；由此 $\mathrm{ctg}^2\varphi=0.5$ 和 $\varphi\approx63°$。在图 448 上已表示得很明显：在该图中坐标轴 $Oxyz$ 投射到平行于轴 Ox 而垂直于 Π' 的平面 Π'' 上。

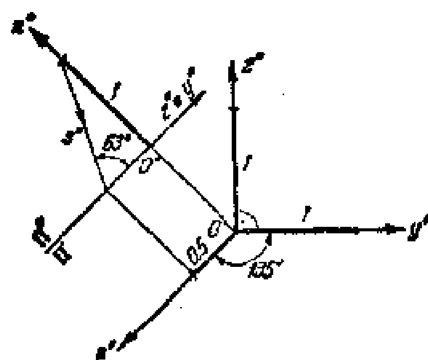


图 448

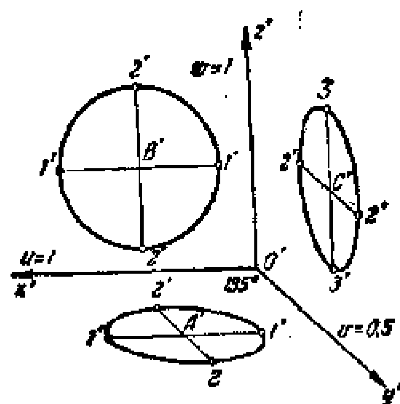


图 449

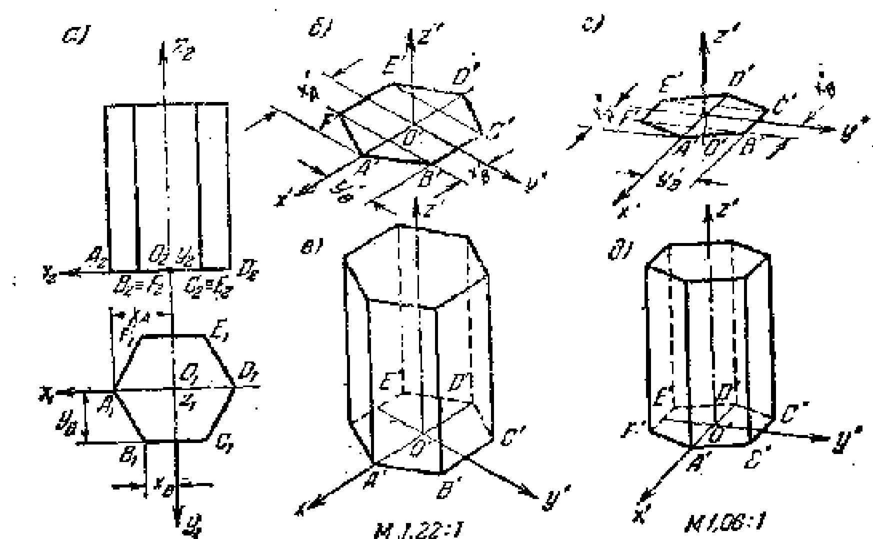
在图 449 上给出了平行于相应坐标面的圆 A、B 和 C 的投影，并且在这个例子里，坐标面 Oxz 平行于平面 Π'。平行于平面 Oxz 的圆 B 投射到 Π' 上毫不变形，而圆 A 和 C 则投射为椭圆 A' 和 C'。这两个椭圆通常是分别根据共轭直径 $1'-1'$ 和 $2'-2'$ 以及 $2'-2'$ 和 $3'-3'$ 作出的，它们的轴还可以利用我们所知的方法，特别是利用亲似对应的性质作出。

在图 443，б 上，用正面斜二测投影画出了与图 443，a 上相同的零件。

§9. 多面体和曲面的轴测投影

1. 作多面体的轴测投影，可以归结为作它的顶点和棱边的轴测投影。这时，对于对称的多面体，通常使它的对称轴与坐标轴重合。

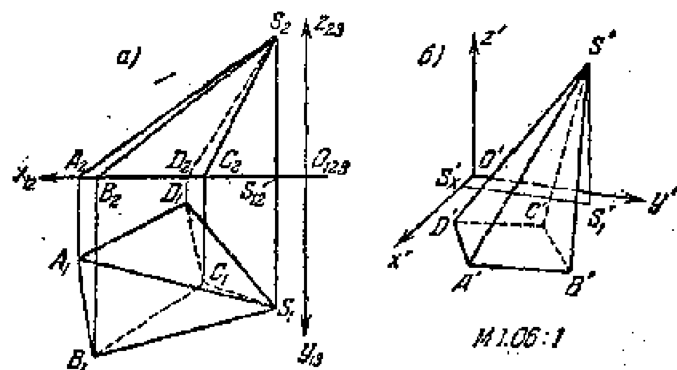
图 450 上给出了正六棱柱的复合图和直观图，直观图是用简化的标准等测投影和二测投影


图 450

画出的

因为棱柱各顶点的次投影与棱柱下底各顶点的轴测投影重合，所以按照前面的规定，不必标记出这些顶点的次投影。因此，只有在这条件下，图 450，*в* 和 *д* 才是可逆的。

图 451 上给出了斜棱锥 $SABCD$ 的复合图和用简化的标准二测投影画出的直观图。


图 451

各顶点的投影是根据取自复合图的坐标作出的。在图 451，*б* 上只表示了锥顶 S 的坐标折线 $O'S'_xS'_1S'$。因为棱锥的底 $ABCD$ 与平面 Oxy 重合，所以次投影 A'_1、B'_1、C'_1 和 D'_1 不必标出。应该着重指出，锥顶 S 的底 S'_1 必须在图上标出，否则图象就失去其可逆性。

2. 曲面的轴测投影作起来稍为复杂一些，因为仅作出它们的轮廓线的投影不一定可以得到直观的和可逆的图象。所以在曲面的轴测图上常还要补充作出在曲面上的某族曲线（或者甚至几族曲线）的投影。例如，在球面的轴测图上，为了加强直观性而画出一些纬圆和子午线，在直纹双曲面的图上则画出一族或两族直母线等等。

在图 452 上给出了旋转柱面的复合图和正轴测图。柱面的轴线与轴 Oz 重合，柱面下底的圆心则与坐标原点 O 重合。轴测投影的形式由所给的体系 $O'x'y'z'$ 确定。这个问题是用图解法

解决的，所以没有确定变形系数的数值，而且，为了在复合图上作出轴测图上边界母线（外形线）c 和 d，于是在图 452，a 上画出了迹线三角形 XYZ 的边 XY 的水平投影 $X_1Y_1=X'Y'$（点 Y 位在柱面下底的圆周上只是偶然的巧合），然后过点 O_1 引直线 $c_1d_1 \parallel X_1Y_1$。

在图 452，б 上也标出了图 452，a 上的外形母线 a 和 b。

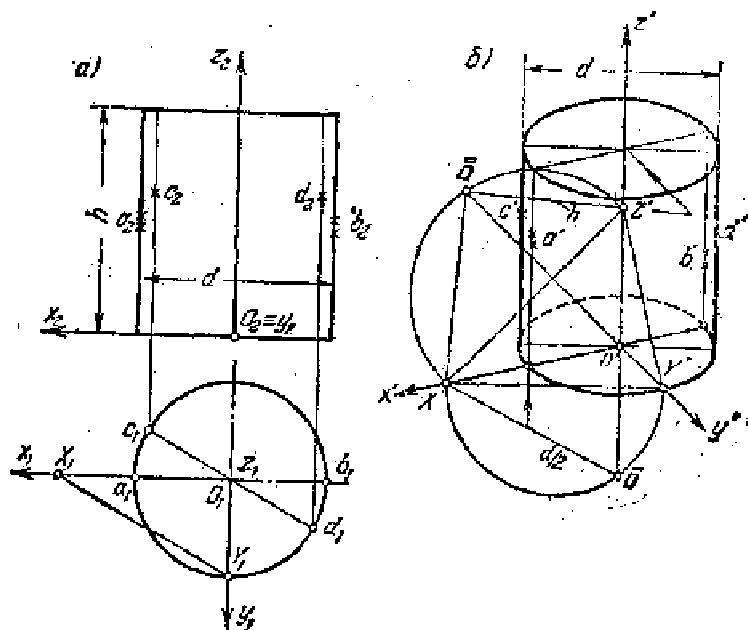


图 452

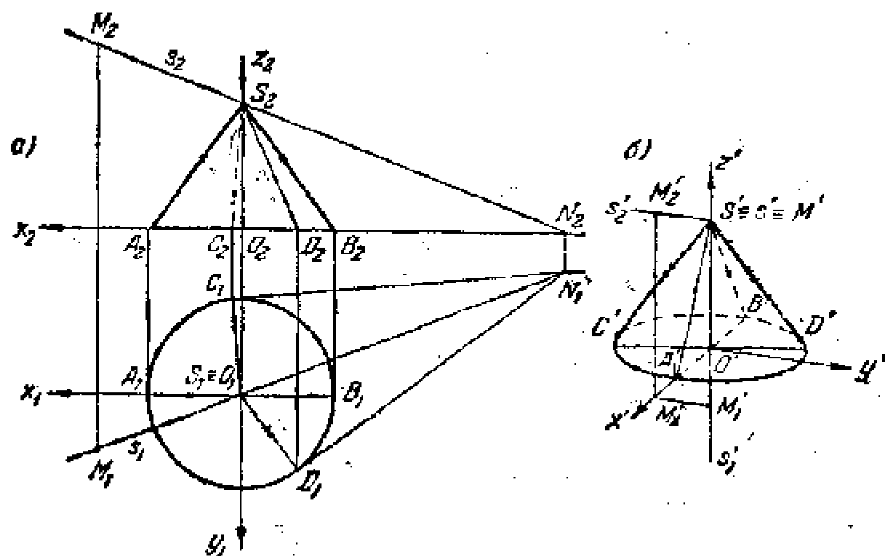


图 453

在图 453 上根据给出的旋转锥面的复合图作出了它的标准正二测投影。复合图上的外形母线 SA 和 SB 以及轴测图上的外形母线 SC 和 SD 都表示出来了，而且，为了在复合图上作母线 SC 和 SD，利用了通过点 S 的投射线 s 以及与锥面相切的投射面 SCN 和 SDN。

3. 球面的正轴测投影是圆①，当用原变形系数时圆的直径等于 d，而用简化变形系数时等于 md，这里，d 是球面直径，而 m 是简化系数。

图 454 上给出了球面的标准等测投影，并画出了它的三条主子午截线和一个纬圆 p。椭圆 $1'$、$2'$ 和 $3'$ 是球面的主圆 1、2 和 3 的投影，它们的长轴垂直于相应的轴测轴，每一条长轴所垂直的那条轴测轴是这个圆所在平面的法线。例如，椭圆 $2'$ 的长轴垂直于 $O'y'$，因为轴 Oy 是圆 2 所在平面的法线。

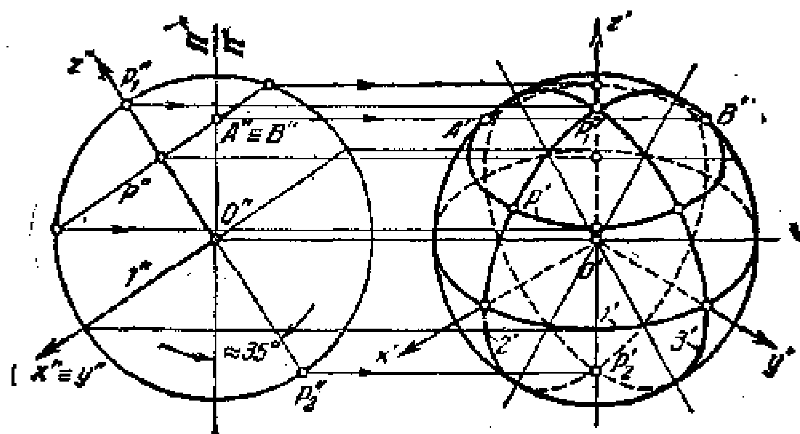


图 454

极点 P_1 和 P_2 以及在轴测图上球面的纬圆与外形线的切点 A 和 B，是利用与 Π' 垂直而平行于轴 Oz 的辅助平面 Π'' 作出的。

在图 455 上画出了同一个球面的标准正二测投影。

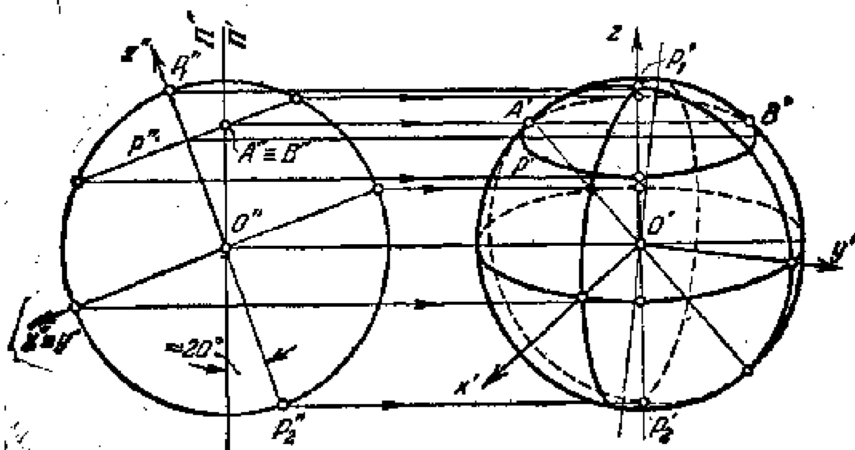


图 455

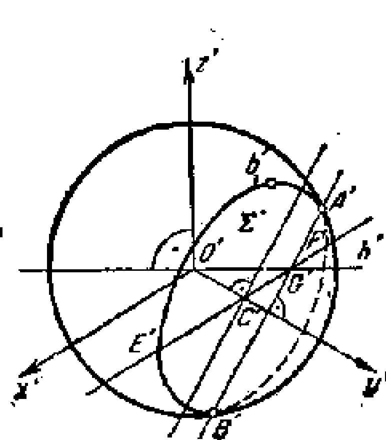


图 456

4. 假设球面被平行于平面 Oxz 的平面 Σ 所截割，同时设平面 Π' 通过点 O(图 456)。于是平面 Oxy 与平面 Π' 相交于水平线 $h \perp Oz$，而与平面 Σ 交于直线 $EF \parallel Ox$。直线 h 与 EF 相交于点 G，这个点同时属于平面 Π'

① 这是在实践中采用正轴测投影的主要原因之一。

和平面 Σ。因此，平面 Σ 与平面 Π′ 的交线 AB 通过这个点，交线上的点 A 和 B 即为所求。这时 $AB \perp Oy$，因为平面 Σ 平行于平面 Oxz。

5. 如前面指出，球面的斜轴测投影的外形线是椭圆，椭圆的短轴总等于球面的直径 d，而长轴等于 $d:\sin\varphi$，其中 φ 是投影方向与平面 Π′ 的夹角。

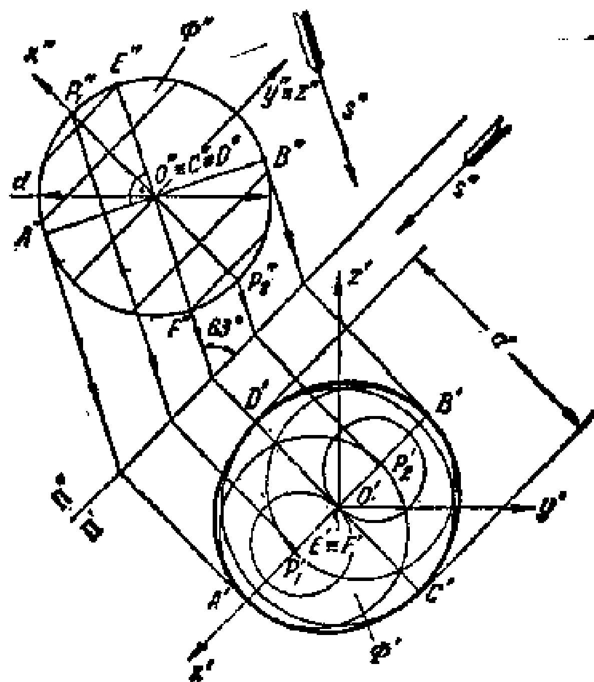


图 457

在图 457 上作出了球面Φ的标准正面斜二测投影 Φ′。Φ′ 的外形线是椭圆 $A'B'C'D'$，它是球面上平行于 Π′ 的圆截线族的包络线。这些截线投射到平面Π′ 上不发生变形。点 P_1 和 P_2 是利用垂直于平面 Π′ 并平行于轴 Ox 的辅助平面 Π″ 找到的。P_1 和 P_2 是外形椭圆 $A'B'C'D'$ 的焦点。这个椭圆是圆$ABCD$ 在平面 Π′ 上的斜投影，该圆所在的平面垂直于投射方向 s，椭圆的短轴 $C'D'$ 是圆 $ABCD$ 的直径 CD 的投影，也是平行于投射方向的圆 $CDEF$ 的投影。

显然 $C'D'=d$ 和 $A'B'=d:\sin\varphi$，式中 d 是球面直径，而 φ 是投射方向 s 与平面 Π′ 的夹角，这个角等于 63°。

6. 由上述可知，球面广泛地应用来作辅助面以解决复合图上各种问题，例如作旋转曲面的外形线，作两曲面的交线等等。在正轴测投影中，也得到同样的应用[①]。

譬如，在图 458 上画出一段弯曲的锥形连接管（循环管状面）的正等测投影，管的直径根据给定的比例(d_1:d_2

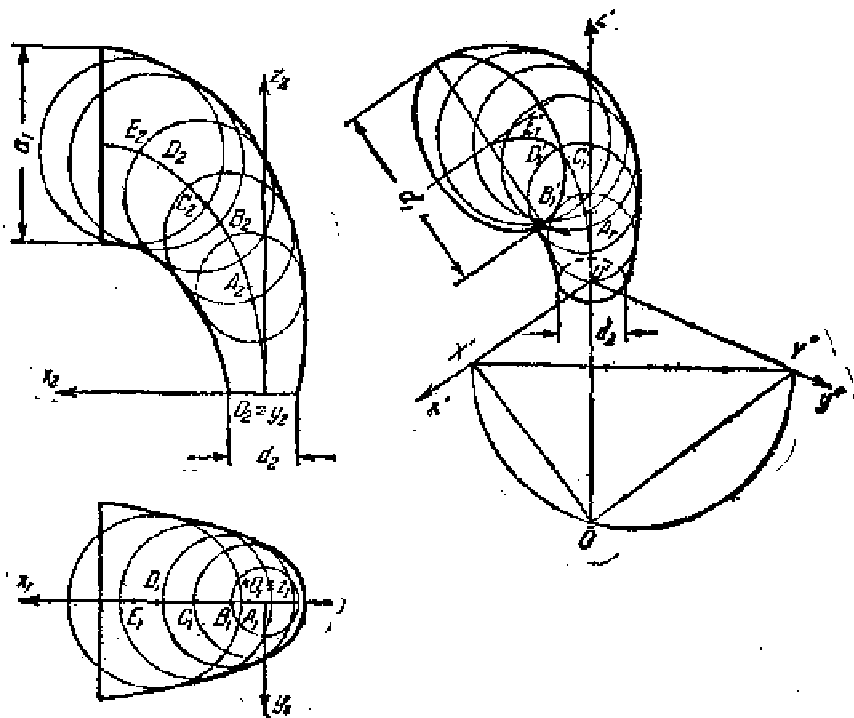


图 458

① 在斜轴测投影里球面的外形线是椭圆，所以在上述意义下辅助球面就难以应用了。

=3:1)而变化，它是利用一定数量的内切球面 A、B、C……作出的。连接管的轴线则根据这些球心的坐标作出。当采用简化变形系数时，管口和辅助球面的直径都要乘上简化系数 m。

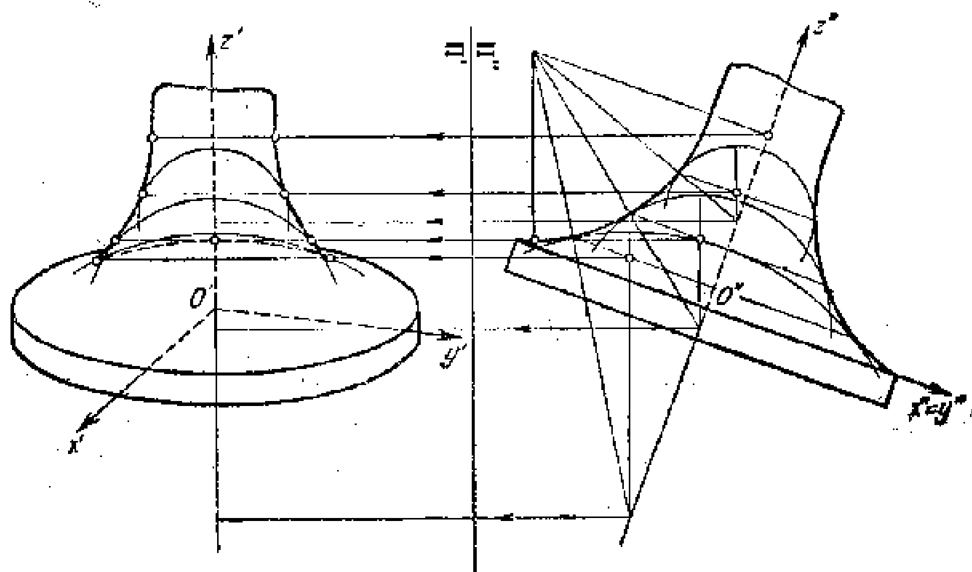


图 459

在图 459 上，辅助球面被用来作一种旋转曲面在轴测图上的外形线。象我们已经多次所作那样，引入垂直于平面 II' 并平行于轴 Oz(在本情况下)的平面 II''，就可以得到复合图，其作法不需进一步说明。

在图 460 上，球面用来作旋转锥面在轴测图上的外形母线，以及此母线与作为锥底轴测投影的椭圆的切点 A' 和 B'。

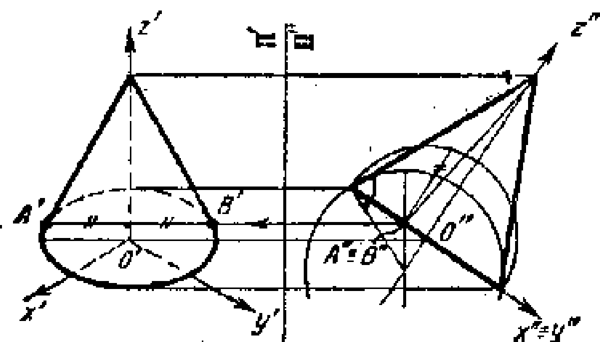


图 460

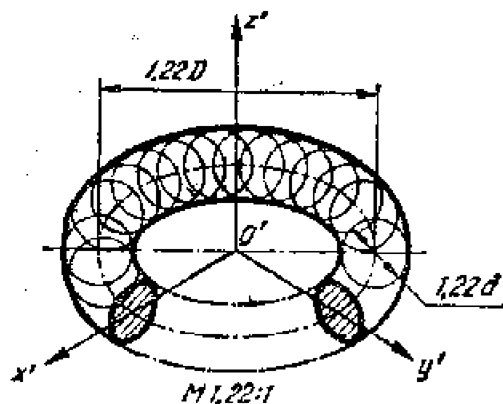


图 461

7. 在图 461 上画出了一个圆环面(环面)。圆环的投影是利用内切于圆环的辅助球面作出的。

§10. 曲面交线的作法

1. 表面交线(过渡线)的轴测投影可根据这条交线上若干个经过选择的点的坐标作出，这些坐标可从复合图上量出，也可以用复合图上求交线的类似方法直接在轴测图上作出。

图 462 给出一个根据过渡线上一系列的点的坐标作过渡线的例子。在曲线上选出了六个特殊点 A、B、C、D、E、F 和一个一般点 G。点 A 的轴测投影 A' 是根据横坐标和竖坐标作出的，而

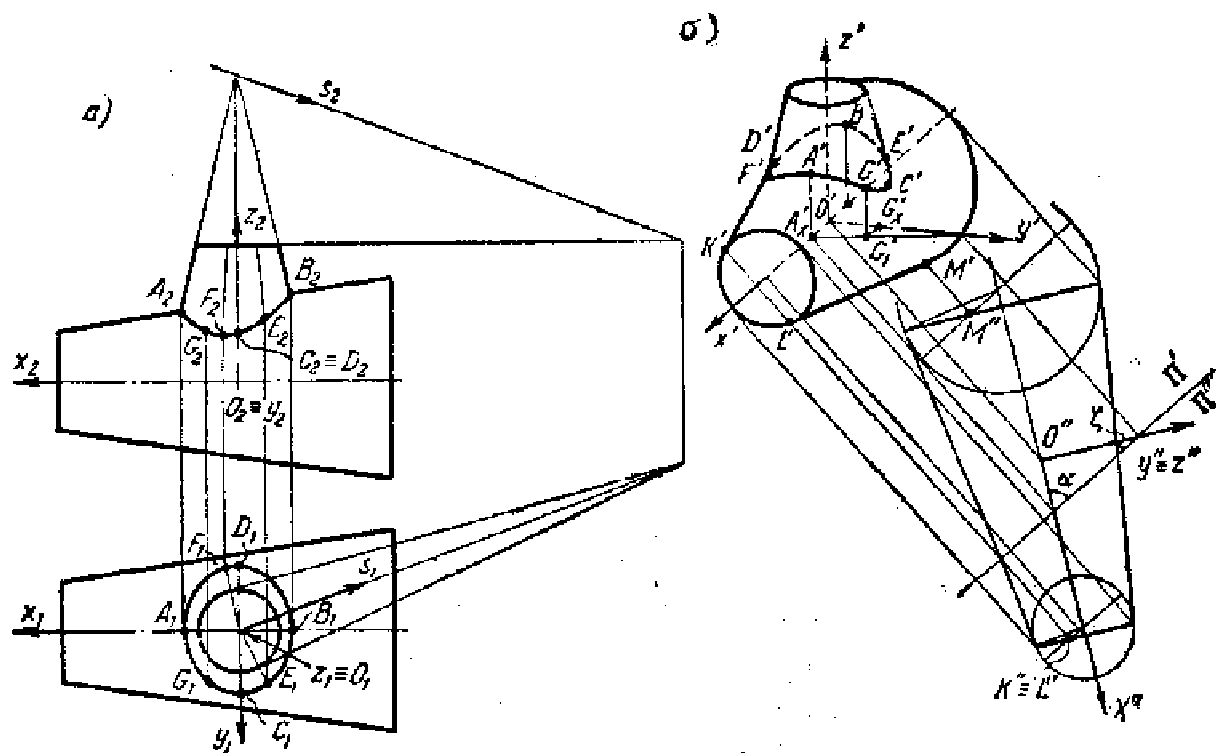


图 462

点 G 的轴测投影 G' 则根据它的三个坐标作出。在图 462, б 上作出了点 A 和 G 的轴测坐标折线，同时也表明了点 K、L、M 的作法，圆锥外形母线的投影与锥底的投影(椭圆)就在这些点处相切。

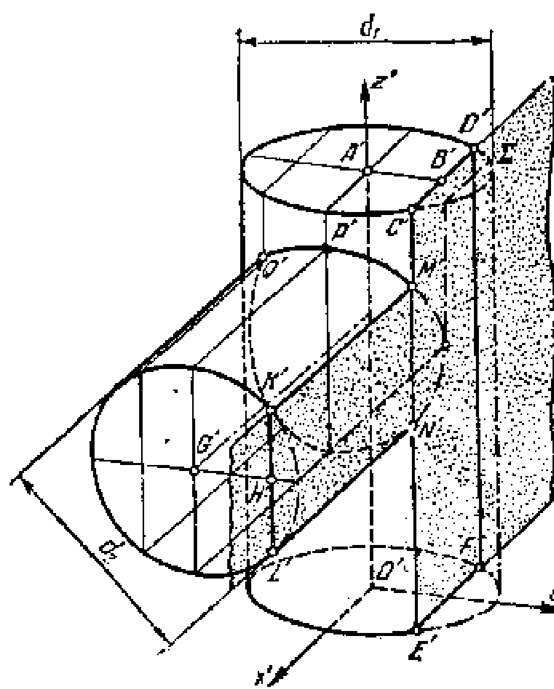
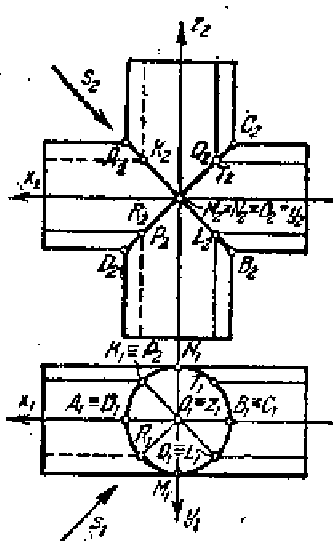


图 463



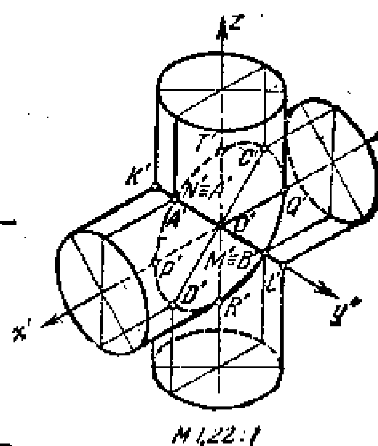
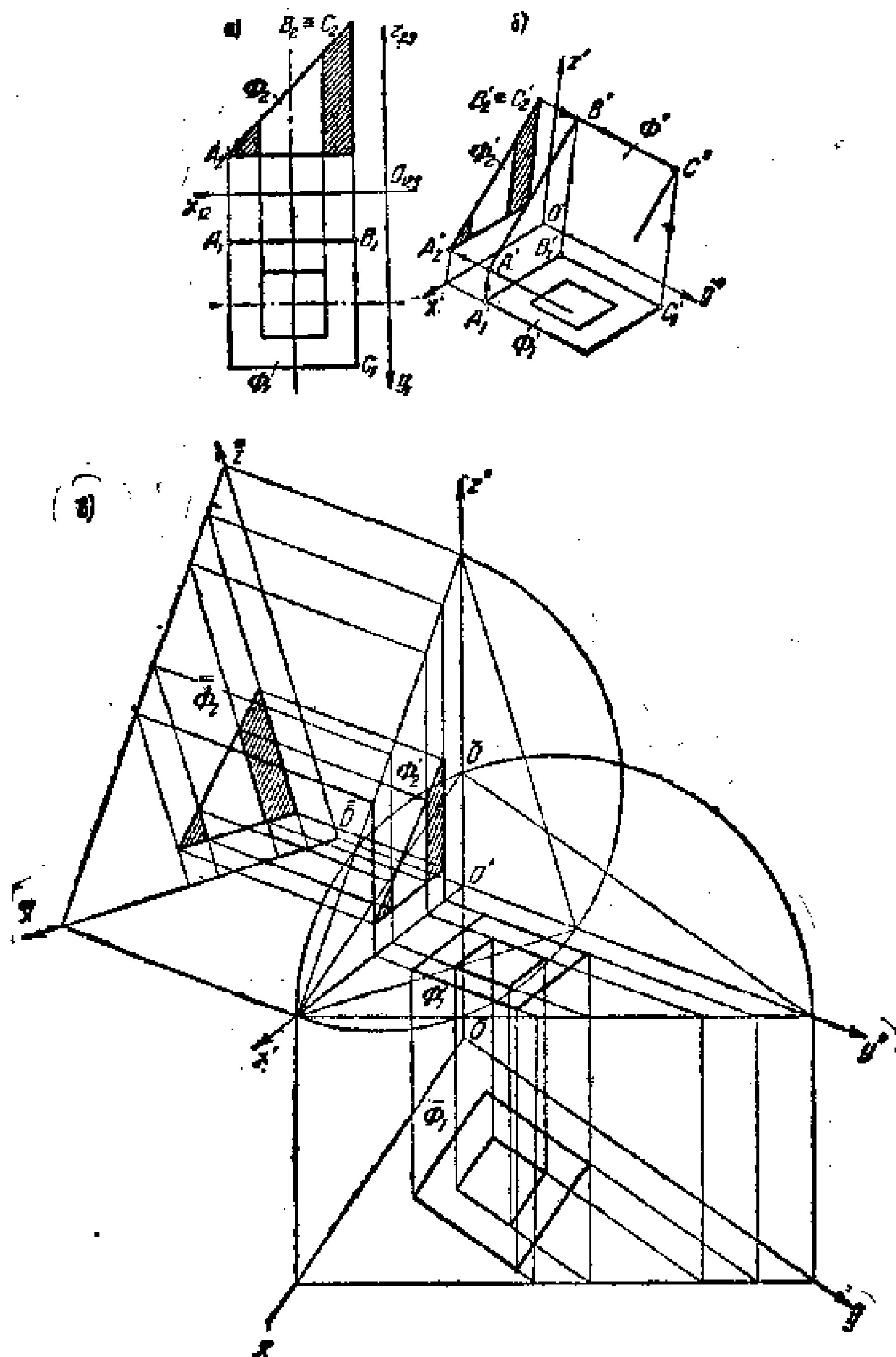


图 464

在图 463 上，两圆柱的交线是利用平行于坐标面 Oxz 的辅助截平面作出的。在图上用细点表示出这样一个平面 Σ，它与圆柱 d_1 交于母线 CE 和 DF，而与圆柱 d_2 交于母线 KM 和 LN，它们的交点就是所求的交线上的点，在本情况下是点 M 和 N（这时 $A'B'=G'H'$）。同样可作出点 P 和 Q，并且点 P 位在坐标面 Oxz 上。

当过渡线为二次曲线时，利用二次曲线的几何特性来作它的轴测投影是最方便的。

譬如，在图 464 上两个直径相等的旋转圆柱相交于两个椭圆 $CDMN$ 和 $ABMN$。第一个椭圆的轴测投影是根据它的轴 CD 和 MN 作出的。第二个椭圆位在与投射方向 s 平行的平面上，因此它的轴测投影是线段 $K'N'M'L'$。在图上还画出了点 T' 和 R'，椭圆 $A'B'C'D'$ 与相应的外形母线就在这两点相切。同时还标出了两圆柱相应的外形母线的交点 K' 和 L'。



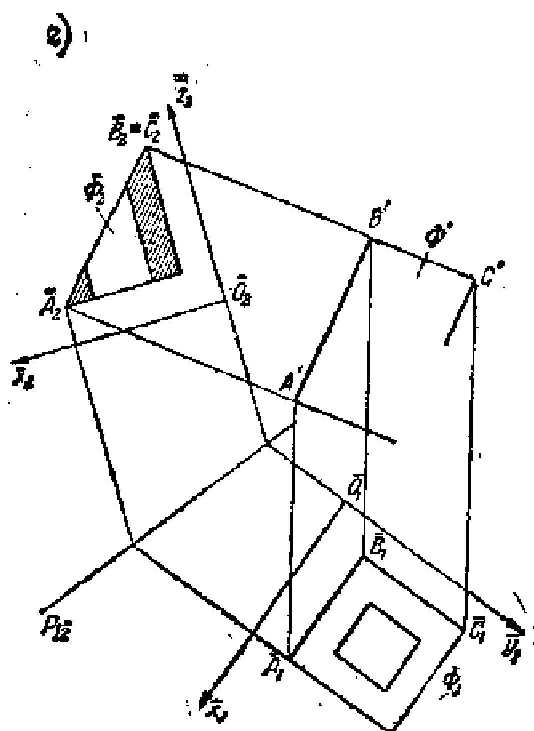


图 465

§ 11. 利用复合图场和轴测投影场之间建立的透视关系作轴测投影

1. 由上述知道，作轴测投影归结为确定所画物体上各个点的原坐标，并将其换算为轴测坐标。然后根据轴测坐标作出轴测图。但是，如果把复合图安放好，并在图场上建立起场 Π_1、Π_2 和 Π' 之间的透视关系，就可不必利用所画物体各个点的坐标而作出轴测图①。现在来说明这一方法。

设已知某物体Φ ($Oxyz$) 的投影 Φ_1 和 Φ_2（图 465, *a*）；作出它的次投影，即平面 $O'x'y'$ 上的 Φ'_1 和平面 $O'x'z'$ 上的 Φ'_2（图 465, *б*），并作出物体Φ的轴测图 Φ'（图 465, *б* 上没有完全作好）。分别以朝外和朝里方向转动平面 Oxy 和平面 Oxz，使这两个平面与平面 Π' 重合。同时，为了避免图形重叠，将 $\bar{\Phi}_1$ 和 $\bar{\Phi}_2$ 分别平行于轴 $O'x'$ 和轴 $O'y'$ 移动一段距离，如图 465, *в* 所示。

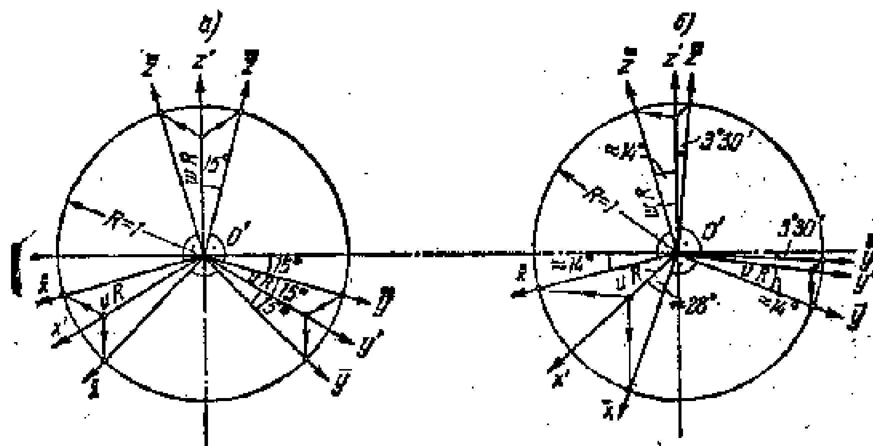


图 466

① 在某平面图形Ω的非退化投影 Ω_1、Ω_2 和 Ω' 之间，这个关系表现为透视-仿射的关系。

所得的图之所以方便，在于无需在这个图上作出物体的次投影 Φ_1' 和 Φ_2'。实际上，如图 465,г所示，如果将物体的两个已知正投影 $\bar{\Phi}_1$ 和 $\bar{\bar{\Phi}}_2$ 放在场 Π′ 上相应的位置，例如，将复合图剪开或者通过坐标换算后再照原来的形状画出来，物体的轴测投影 Φ′ 不难根据 $\bar{\Phi}_1$ 和 $\bar{\bar{\Phi}}_2$ 而作出。$\bar{\Phi}_1$ 和 $\bar{\bar{\Phi}}_2$ 之间的关系也不难建立，即延长坐标面 Oyz 以及平行于该坐标面的任一个平面的两个退化的投影使其相交，便找到直线 $p_{1\bar{2}}$，即场 $\bar{\Pi}$ 和 $\bar{\bar{\Pi}}$ 的点之间的对应轴[①]。

在场 Π_1、Π_2 和 Π′ 之间，场 Π_2、Π_3 和 Π′ 之间，以及场 Π_1、Π_2、Π_3 和 Π′ 之间都可以建立起同样的关系，而且，对于标准轴测投影，各轴重合之后的相应的倾斜角度，一经确定便永远不变。图 466,а 所示的是标准正等测投影的各轴倾斜角度，图 466,б 表示的是标准正二测投影的。

图 467 表示用刚才讨论的方法来作两旋转圆柱的交线。

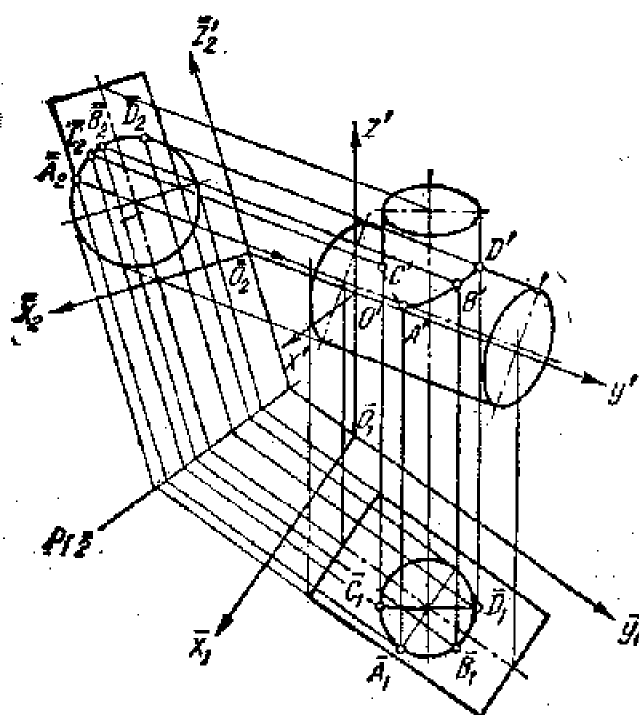


图 467

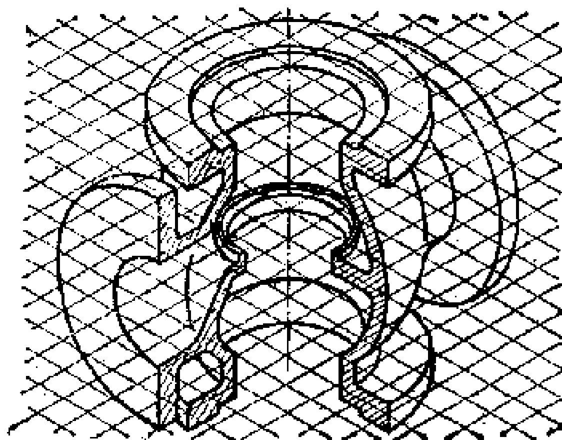


图 468

§ 12. 轴测投影绘图的机械化

近代已设计出许多种轴测仪，使轴测投影作图能够使用机械。本书限于篇幅不能对这些机械进行论述[②]。下面只介绍关于减轻轴测图绘制工作的若干建议。

譬如，在图 468 上，阀体的等测投影是在专用的‘等测纸’上作出的。

图 469 所示的线图用来图算线段的原长度乘标准轴测投影的变形系数。在绘制复杂的轴测图，尤其是在需要完成大量轴测图时，使用这种线图已证明是合算的。这种线图用起来并不复杂。例如，要将线段 $a=78$mm 乘上变形系数 0.82，可先在轴 Ox 上找出数标 78，在过该点的铅直线上，取其中夹在标号为 0.82 的两斜线之间的一段，即为所求（$a'=0.82a$）。轴 Ox 等分任一条所求的线段，以便于作正对称或斜对称的图形。

---

① 一般地说，这个对应不是一一对应。

② 参看 Г.Б. 瓦尔茨和 Г.А. 乌沙科夫《绘图和投影变换用的机械》，哈尔科夫，哈尔科夫国立高尔基大学出版社，1960 年版。

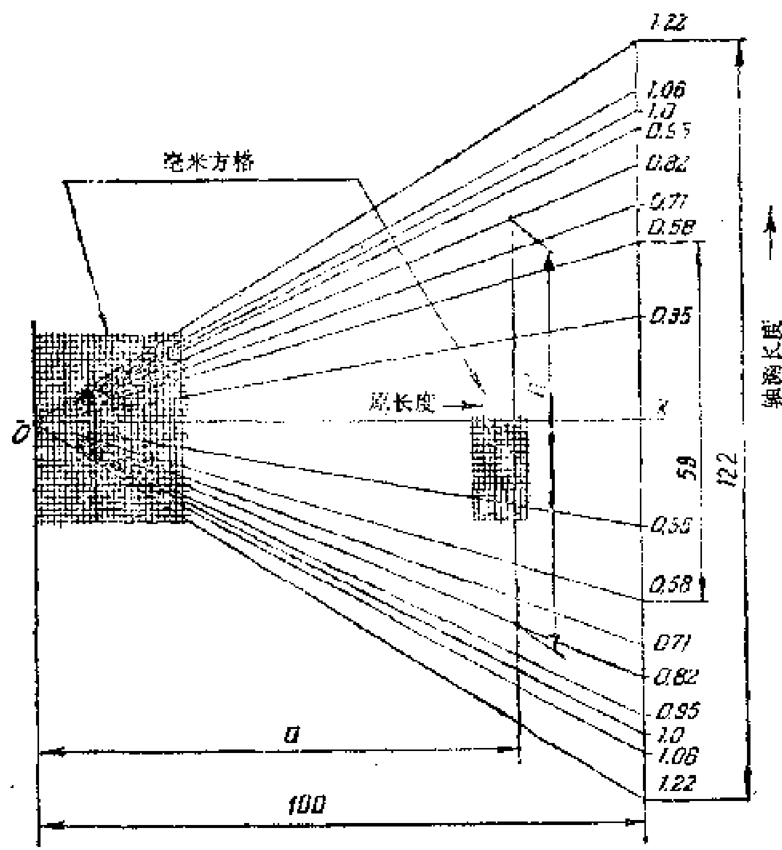


图 469

复 习 题

1. 轴测投影法的实质是什么？
2. 何谓轴测轴和轴测尺度？
3. 轴间角是否决定于轴测尺度？对这个问题应引用什么定理？
4. 轴测投影的形式有哪几种？
5. 何谓变形系数？
6. 正轴测投影的变形系数应当满足什么条件？
7. 斜轴测投影的变形系数应当满足什么条件？
8. 怎样的变形系数称为简化变形系数？简化系数是怎样计算的？
9. 如果给出了某正轴测投影的迹线三角形，怎样找出轴测轴？
10. 如果给出了某正轴测投影的轴测轴，怎样求出各轴的变形系数？
11. 如果椭圆是圆的正轴测投影，怎样在图上确定椭圆长轴的方向和大小？

练 习 题

1*. 试求原尺度单位的大小并确定各轴测轴的变形系数(图 470)。

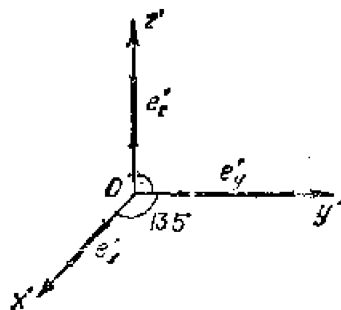


图 470

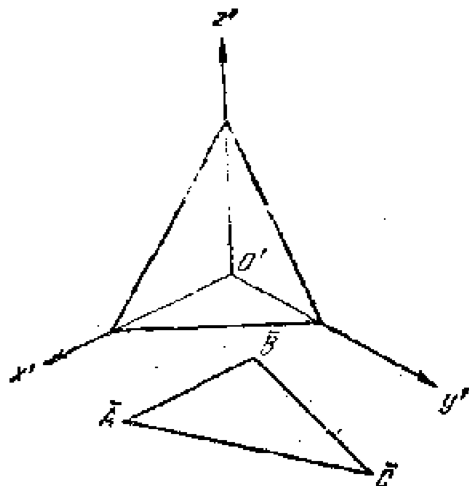


图 471

2. 给出了某正轴测投影的两个变形系数：$u=0.75$ 和 $v=0.81$，试求出第三个变形系数。

3*. 试利用上题的数据作轴测轴(提示：利用韦依斯巴赫定理，参看本章§3之5)。

4. 试作一正轴测投影的迹线三角形，然后利用普通的公制尺度写出迹线三角形各顶点的原坐标。

5. 设△ABC 位在平面 Oxy 上，试根据它重合在平面 Π' 后的位置 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 作出它的轴测投影(图 471)。

6*. 试利用亲似关系的性质解上题。

7. 试确定直线 AB 与坐标面 Oxy、Oxz 和 Oyz 的交点(图 472)。

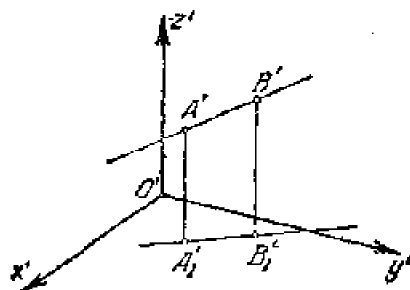


图 472

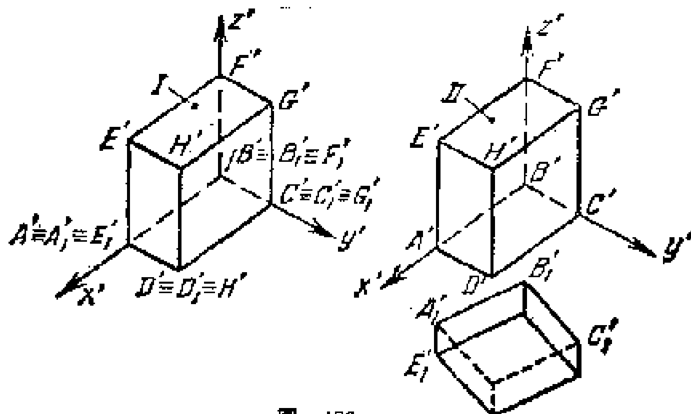


图 473

8. 棱柱 I 和 II 是否全等；试确定这两个棱柱的棱边 AE 的实长(图 473)。

9. 一正轴测投影的形式由迹线三角形 $X'Y'Z'$ 给定。试作附图所示零件的轴测图(图 474)。

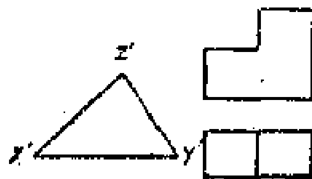


图 474

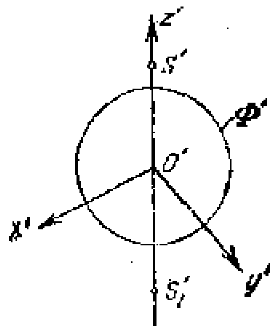


图 475

10. 试作外切于已知球面Φ的圆锥 S 的轴测投影(图 475)。确定圆锥的高度。

11. 试作由平面 Σ 截割了的旋转柱面的标准等测投影图(图 476)。

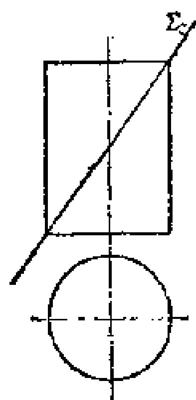


图 476

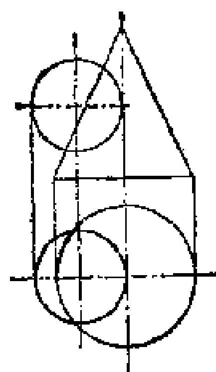


图 477

12. 试作出球面与旋转锥面相交的标准二测投影图(图 477)。

第十三章　复合图上和轴测图上阴影的作法①

1. 基本概念和定义 · 阴影的表示法　画阴影是为了使投影图(主要是在建筑图方面)具有更好的直观性以及解决一系列实际问题(例如,显示某建筑的外部或内部在一定条件下的照度,根据建筑物投下的阴影确定建筑物的大小等等)。

阴影分为本影和落影。物体被光源照射时,在物体表面的背光部分得到的阴影称为本影,而由该物体投到另一表面上的阴影则称为落影。这时,如果照射物体的光线由一点(固有点)L发出,则阴影称为炬影;如果光线彼此平行(或者说由无穷远点L_∞发出),则阴影称为日影。因为日影具有更大的实用意义,所以我们仅讨论日影的作法。

我们规定,用表示几何形本身的字母来表示这个几何形的阴影,只是在字母的右下角加上一个零,例如:A_0是点A在复合图上的阴影;A'_0是点A在轴测图上的阴影。

2. 光源L_∞在图上位置的给定 · 点的阴影　光源L_∞("太阳")的位置通常用由它发出的射线l来给定。显然,在复合图上l的位置由它的两个投影l_1和l_2确定,而在轴测图上则由它的轴测投影l'和其中一个次投影(通常是l'_1)确定(图478和479)。这时,点L_∞的投影没有必要表示,因此以后的图就不再表示这个投影。

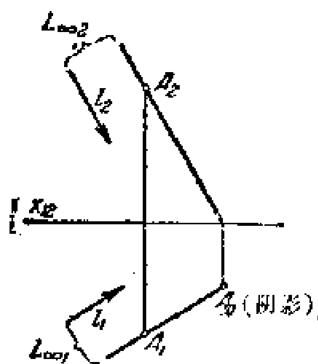


图 478

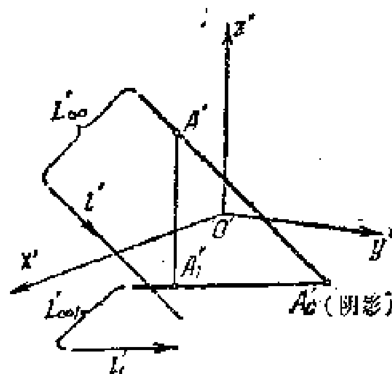


图 479

当光线被一个点阻挡时,便可以认为这个点投出一条阴影射线。因此,求点落到某表面上的阴影,可以归结为求一直线(阴影射线)与该表面的交点,该直线通过已知点和光源L_∞,也可以说是通过已知点并平行于射线l。

图478表示求点A落到平面Π_1上的日影的作法。图479是同一问题在轴测图上的解。图中点A'的阴影A'_0是两直线$L'_\infty A' \parallel l'$和$L'_{\infty 1}A'_1 \parallel l'_1$的交点。

3. 线的阴影　当光线被一条直线阻挡时,不管是在太阳光下或在烛光下,这些光线的总和构成一个平面。这个平面习惯认为是该直线投出的一个阴影平面,通常将这个平面称为光线平面。由此可见,求直线落在某表面上的阴影,其作法可归结为作光线平面与该表面的交线,而该光线平面则通过已知的直线和照射该直线的光源L_∞。

在特殊情况下,线段的阴影可能退化为一个点。

如果用平面曲线或空间曲线代替线段,则在一般情况下阴影平面变为阴影(光线)柱面②。因此,求曲线落到某表面上的阴影,其作法可归结为作一光线柱面与该表面的交线,这个柱面的导线是已知的曲线和光源L_∞(或者

① 这里仅从纯几何观点来研究问题,而不涉及物理方面的现象。

② 在烛光照射下则变为锥面。

说柱面的母线平行于射线 l)。

无论线或点都可以认为没有本影。

4. **平面图形(不透明的薄板)的阴影** 只要平面图形所在的平面不通过 L_∞(或者说不平行于射线 l),则当光流中的一部分光线被这图形阻挡时,这图形就投下一个阴影柱,柱的表面(光线表面)将空间被照亮的部分从阴暗的部分分出来。光线表面为另一个表面所截得的截线就形成落在后一表面上的阴影的外形线。如果平面图形是 n 角形,则光线柱面变为 n 棱光线柱面,这时 n 角形就是这个棱柱面的导线,母线则与光线平行。

平面图形朝向阴影柱的那一面位在阴影内,也就是说,平面图形应当分为向光面和背光面。换句话说,平面图形总有本影。平面图形与光线平行时则例外。

平面图形落到与它平行的平面上的阴影,与图形的本身是全等的。

图 480 表示三角形 ABC 的本影和 ABC 在平面 Π_1 上的落影的作法。落影 $A_0B_0C_0$ 是平面 Π_1 与三棱柱面的截线,该柱面围成了由三角形 ABC 投出的阴影柱。

为了解决在哪一个投影上看到三角形的向光面,哪一个投影上看到背光面的问题,可引出直线 $r \parallel l$。竞争点 M 和 N 以及 P 和 Q 表明,在正面投影上看到的是背光面(本影),而在水平投影上看到的是向光面。

本影用细点表示,而落影用细的平行线表示。

阴影 $A_0B_0C_0$ 可以作为与三角形 $A_1B_1C_1$ 亲似的图形而作出。亲似轴是平面 ABC 与平面 Π_1 的交线(在图 480 上没有表示出来),亲似方向平行于 l_1。

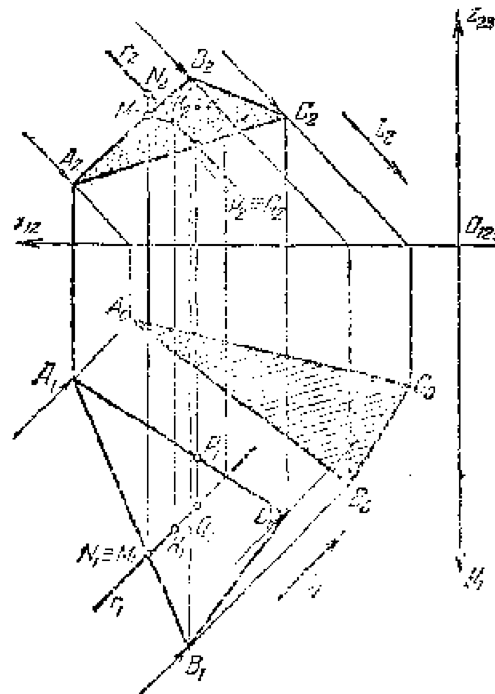


图 480

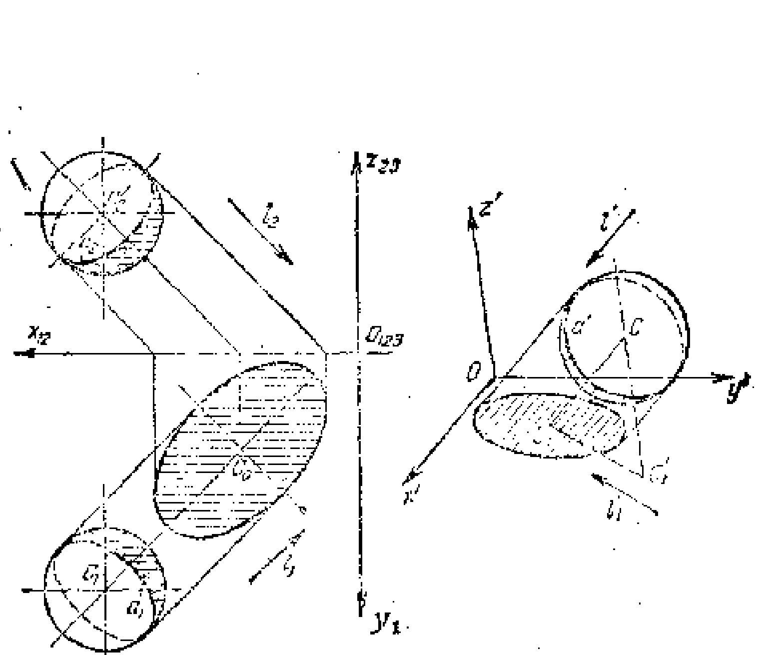


图 481

5. **三维几何形体(不透明体)的阴影** 设光源 L_∞ 照射着某不透明的物体中。显然,这时一部分光线从它周围通过,一部分被它挡住,而一部分则与它相切[1]。"切"于物体的全部光线构成一个闭合的光线棱柱面或闭合的光线圆柱面,这个柱面将空间被照亮的部分与阴影柱分开。柱面为另一个表面所截得的截线,构成该物体落到这个表面上的阴影的外形线。

物体朝向阴影柱的表面位在阴影内。物体表面上的向光面和背光面的分界线是光线与物体密切的那些切点的总和。求本影的投影,可归结为作光线表面(切于物体)的密切线的投影,这个光线表面是沿给定的光线方

[1] 在这里和以后,相切(касание)"和"密切(прикосновение)"应作特殊理解。

向包围住物体的[①]。

譬如，自圆球投出的阴影柱是由旋转柱面围成的。因此，球面落到平面上的阴影在一般情况下是椭圆（图481）。切线（它就是光线表面的导线）是大圆 a，这个圆位在与光线方向垂直的平面上。因此，圆球的本影总遮盖住其表面的一半。切线的投影——椭圆 a_1、a_2 和 a'——在图上将球面的向光部分与背光部分分开。

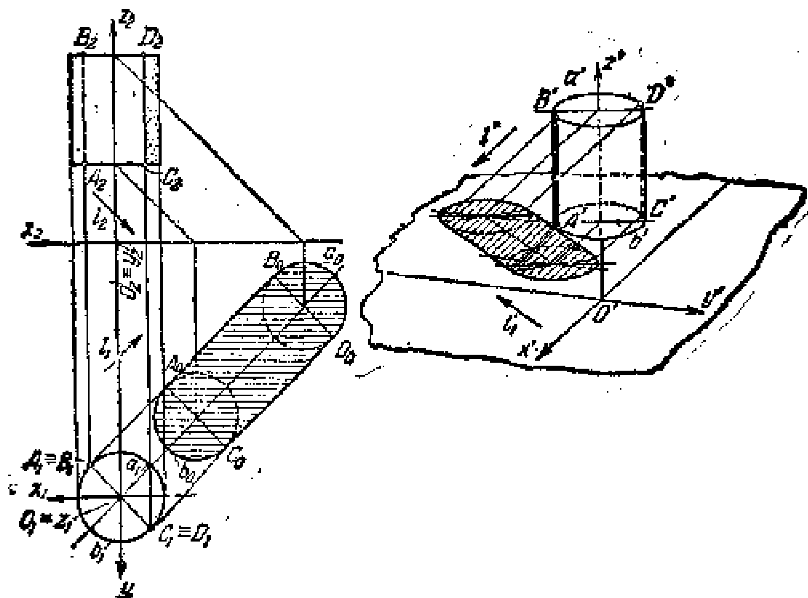


图 482

从旋转柱面投出的阴影柱（图 482），在一般情况下，由两个"半椭圆柱"以及与它们相切的两个平面所围成，椭圆柱的导线是相应的两个半圆（圆柱的上底 a 和下底 b），切平面的导线是母线 AB 和 CD，图形 $A_0B_0a_0D_0C_0b_0$ 是光线表面为平面 Π_1 所截得的截线，它由半圆周 a_0 和 b_0（因为圆柱的底平面平行于平面 Π_1，所以底的阴影与底本身全等，即 $a_0=a$ 和 $b_0=b$）及与这些圆周相切的直线 A_0B_0 和 C_0D_0 所围成。本影由"密切线"（它就是光线表面的导线）$ABaDCb$ 围成。这样，如果照射方向既不平行又不垂直于旋转柱面的轴线，则柱面的本影总占有侧面的一半和一个底面。

如果物体有一个棱面与一平面重合，而要在这平面上作物体的落影，则该棱面的阴影（落影和本影）与棱面本身重合，因此通常无需表示出来。

在图 483，a 和 $б$ 作出了旋转锥面的阴影。

6. 方向 l 的选择　在这以前我们没有讲过光线方向的选择问题或光源 L_∞ 的位置问题。在复合图上，这个方向通常取它平行于当立方体的棱面重合于坐标面时，通过坐标原点的立方体的对角线的方向（图 484）。在这种情况下，光线方向 l 的三个投影 l_1、l_2 和 l_3 均与水平线成 45°角。但在正等测投影中，这个方向 l 平行于轴测投射方向 s，结果，点的投影与它的阴影重合。因此，在正等测投影中，当光线的方向如上述时，任何一个物体的落影 Φ'_0 和本影 Φ'_* 均与物体本身的图象 Φ' 重合，例如图 483，a 上的旋转锥面就是这样。因此在轴测图上作阴影时，光线的方向 l 要这样选择：使能最大限度看到落影和本影。当光线 l 平行于 Π' 而对水平线成 45°～60°角时所得的结果特别良好（图 485）。

7. 同时落在几个表面上的阴影的作法　如果任一物体的阴影落在不同的表面上，例如落在表面 I 和 II 上，可先把表面 II 看作不存在而作出只落在表面 I 上的阴影，然后又不考虑表面 I 而作出只落在表面 II 上的阴影。去掉两个落影的相应部分就得到所求的阴影。

---

① 实际上此问题归结为可见性线的作法。

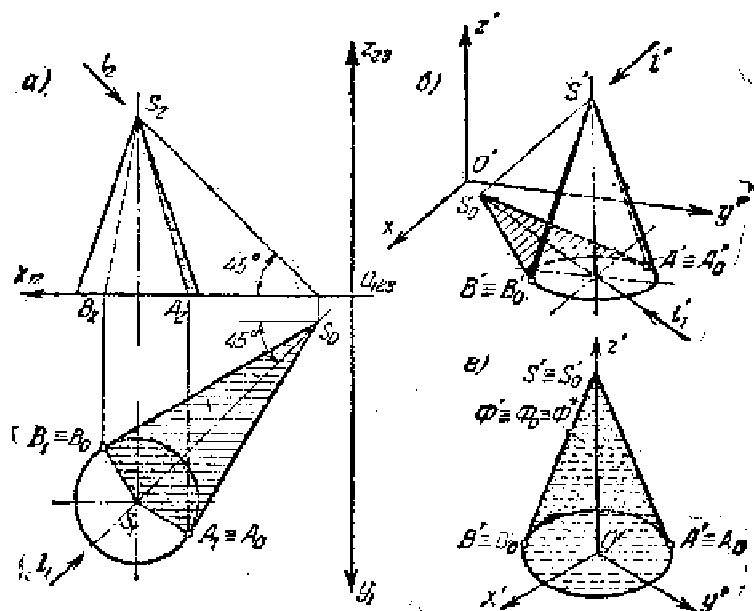


图 483

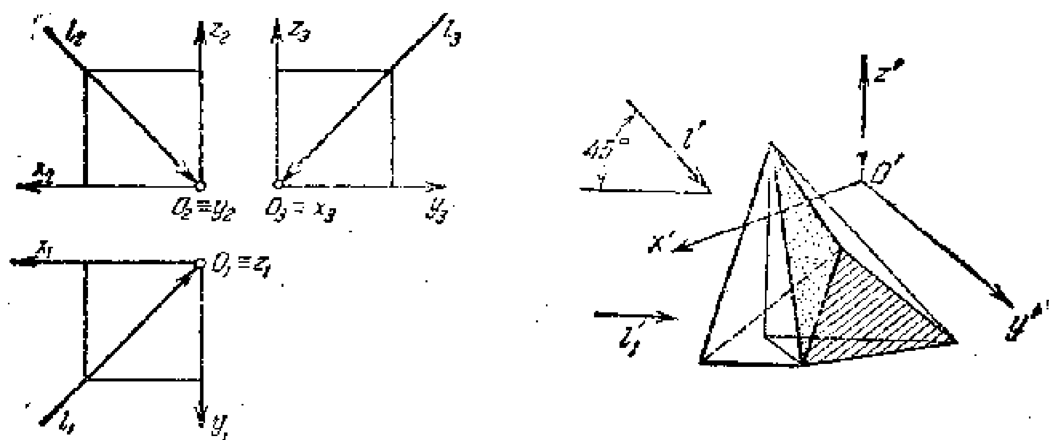


图 484

图 485

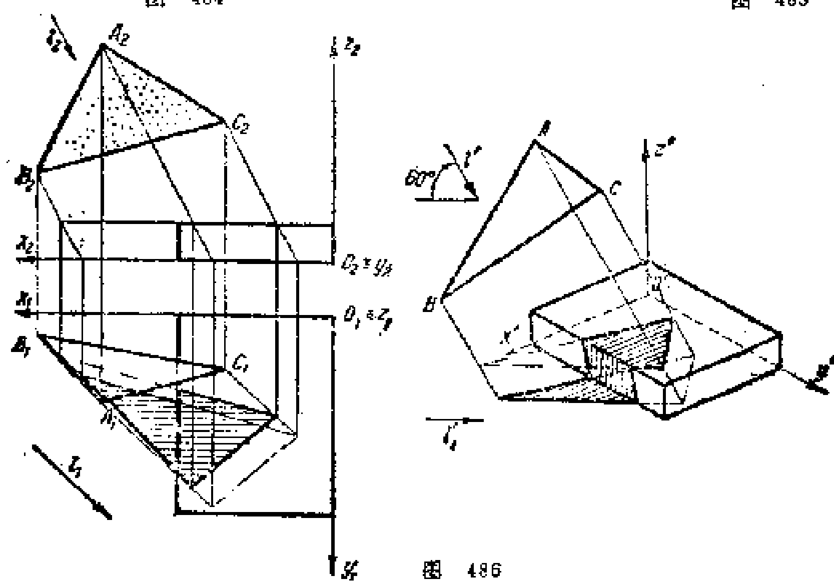


图 486

在图 486 上，$\triangle ABC$ 的阴影一部分落在平面 Π_1 上，一部分则落在放在 Π_1 上的长方块的两个棱面上。按照刚才所述，先假定长方块不存在而作出落在平面 Π_1 上的阴影，然后作出落在长方块顶面上的阴影，这时可以把这顶面当作代替了平面 Π_1。其余的作法在图中已表示清楚。

复 习 题

1. 日影和烛影的区别何在？

2. 从一物体落到某表面上的阴影的外形线是什么？

3. 照射旋转锥面的光线方向不同时，锥面上的本影可能占有其侧面的哪些部分？

4. 试描述在下列情况下光线表面的形状，该光线表面围成了由旋转锥面投出的阴影柱：光线方向与锥轴成锐角；光线方向平行于锥轴；光线方向垂直于锥轴。

5. 试阐明为什么在轴测图上不能只给出光线方向 l 的一个轴测投影 l'？

6. 由直线段落到球面、旋转柱面和旋转锥面上的阴影会有怎样的形状？

练 习 题

1. 试作出与平面 Π_1 垂直的线段在 Π_1 上的阴影，并写出确定阴影长度对线段长度的关系式①，作出其轴测图。

2. 已知三角形 ABC 的阴影 $A_0B_0C_0$。试定出当三角形的平面垂直于光线方向时三角形的实形。

3. 试利用两个三角形在平面 Π_1 上的落影求出这两个三角形的交线（提示：取光线方向平行于其中一个三角形平面）。

4. 试作出具有方孔的圆板的落影，圆板要这样放置：使一部分阴影落在平面 Π_1 上而另一部分阴影则落在平面 Π_2 上（图 487）。

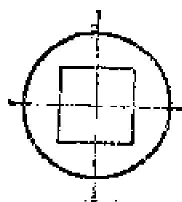


图 487

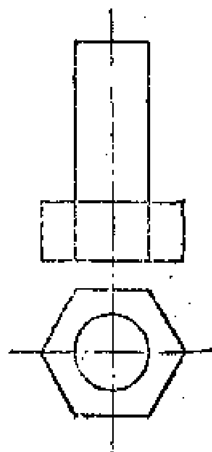


图 488

5. 用亲似对应的性质作椭圆在平面 Π_1 上的落影，椭圆垂直于 Π_2 并倾斜于 Π_1。

6. 试作图中所示零件的本影和落影（图 488）。

---

① 在本题及后面各题中，如果不加说明，则在复合图中光线的方向就是与正立方体的对角线平行，而在轴测图中则假定与平面 Π' 平行且与水平线成 45°角。

第十四章　关于投影图的完整性问题

1. 设在平面 Π′上有原形体Φ的投影图 Φ′(图 489)。

在图象 Φ′ 上标出四个任意点 A'、B'、C' 和 D'，这些点对应于原形中四面体 $ABCD$ 的顶点。

假定形体Φ上的任意点M在图上用点M' 表示。用字母 M_1 表示直线 AM 与平面 BCD 的交点。点M_1 称为点M的底。在图象 Φ′ 上，点M_1的投影M_1'称为点M' 的底。今后只讨论平面 Π′ 上的图象 Φ′。

如果点M' 的底M_1'在图上是确定的(已给定或可以作出)，则点M' 称为定点。

如果点 X' 的底 X_1' 是不定的(即可以在直线 $A'X'$ 上任意选取)，则点 X' 称为不定点。为使不定点 X' 成为定点，只要给出线段 $A'X_1'$ 的长度，即给出一个参数就够了。

如果图象 Φ′ 上所有的点都是定点，则这个图象称为完整图(更准确地说，是定位完整图)[①]。

假定，在图象 Φ′ 上给出 k 个不定点的底，图象 Φ′ 就变成完整图。

这时，如果转变成定点的不定点数 k 是使图象 Φ′ 达到完整性的最少数目，则数 k 称为图象 Φ′ 的不完整系数。

可以证明，图象 Φ′ 的不完整系数既不取决于所引用的形体 $A'B'C'D'$ 的选择，也不取决于变为定点的不定点的选择[②]。对于已知图象 Φ′ 来说，不完整系数是一个常数，同时它表示了使图象 Φ′ 变成完整图应当给出的参数的数目。

变成定点的不定点的总和与所引用的形体 $A'B'C'D'$ 的顶点一起构成一个点集。这个点集称为图象 Φ′ 的点基，并用字母 T' 表示，点集 T' 可以是有限的或无穷的。如果点基的点数是有限的，则它用公式

$$t=k+4 \tag{1}$$

表达。

对于完整图，我们有 $k=0$ 和 $t=4$。

2. 不难相信，通过两个定点的直线，其上所有的点都是定点。同样，通过三个定点的平面，其上所有的点也都是定点。

在完整图上，可以解决定位问题，特别是，作出两定平面的交线和定直线与定平面的交点[③]。

在不完整图上，不是每一个定位问题都可解，只有属于不完整图中的完整部分的定位问题才是可解的。例如，在图 490 上可以作出直线 $D'Q'$ 与平面 $A'B'C'$ 的交点(因为它们都是确定的)，但无法作出直线 $D'E'$ 与平面 $A'B'C'$ 的交点(因为直线 $D'E'$ 是不定的)。

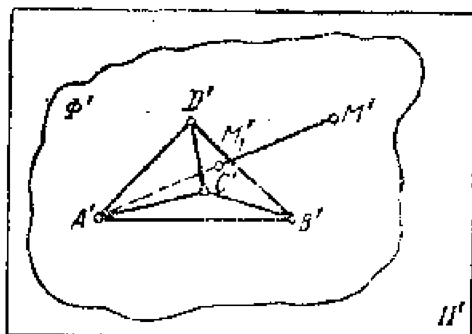


图 489

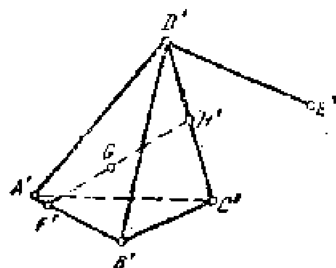


图 490

① 关于图象的度量完整性问题参看《现代画法几何问题》论文集，1947 年版，第 191 页。

② 参看《现代画法几何问题》论文集，1947 年版，第 148 页。

③ E. A. 格拉祖诺夫和 H. Ф. 切特维鲁新《轴测投影学》，1953 年版，第 48 页。

3. **点基Γ在复合图上的应用** 设已知形体Φ的水平投影Φ_1，求作其正面投影。我们来证明，给出图象Φ_1的点基的正面投影（图491）是解此题所必要的和充分的条件。

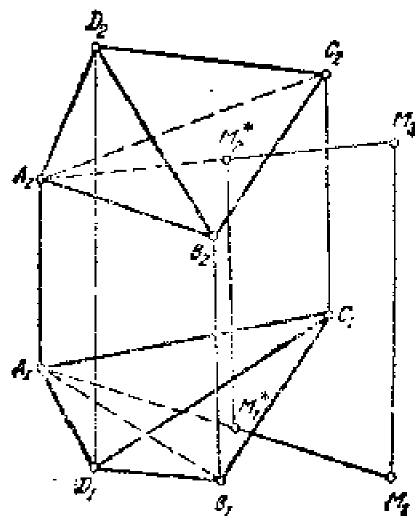


图 491

在Φ_1上取四个点A_1、B_1、C_1和D_1，它们是形体Φ的四面体$ABCD$的顶点的水平投影，然后令$A_1B_1C_1D_1$作为图象Φ_1的所属形体。

这时，如果任一点M_1是图象Φ_1的点基，则根据条件，正面投影A_2、B_2、C_2、D_2和M_2已经在复合图上给出。

在这种情况下，可以作出点$M^*=AM\times BCD$，也就是点M_1^*，这个点是点M_1在图象Φ_1上的底。这样，图象Φ_1的点基的所有点的底都作出来了，这个图就变成完整图。因此，对于图象Φ_1上的任意点X_1，可以作出它在平面$B_1C_1D_1$上的底X_1^*，然后作出在平面$B_2C_2D_2$上的底X_2^*，最后，沿连系线在直线$A_2X_2^*$上求出点X_2。

另一方面，如果图形Φ_1的点的总和（它们的正面投影是给出的）不包含点基，则图象Φ_1至少有一个点，它的底可以在直线上任意选取。这就是说，正面投影Φ_2是不定的，因而不可能作出。

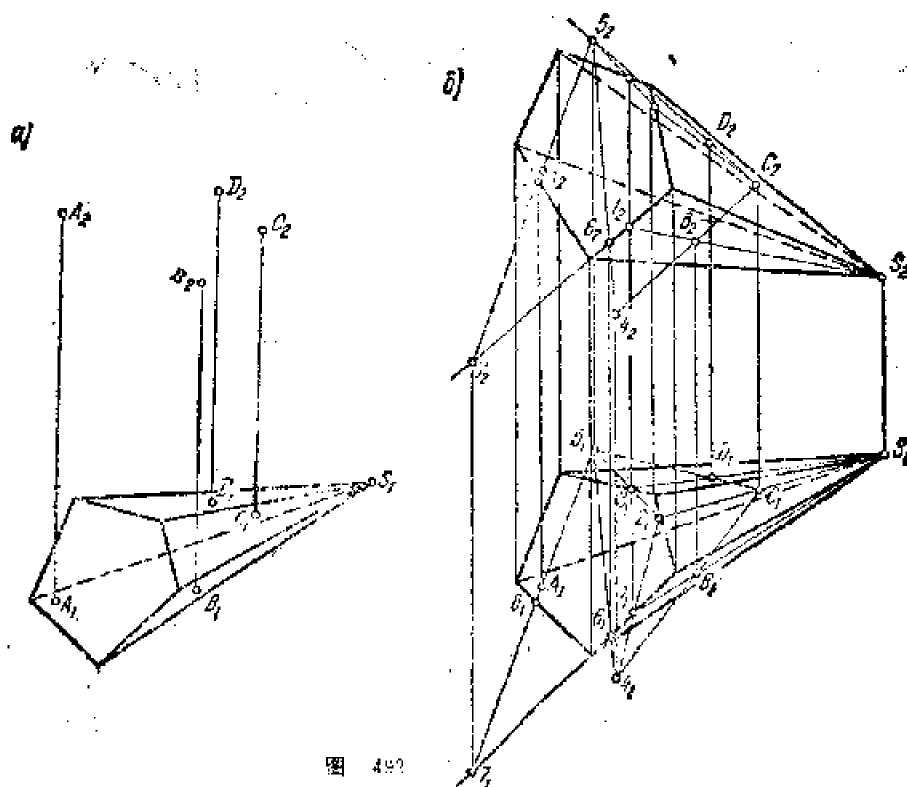


图 492

作为一个例子，在图492，*a*上有五棱锥的水平投影。因为这个图是完整的，所以$k=0$和$t=4$。因此，在已知情况下，点基由所属形体的四个点组成。在棱锥投影的棱面上选出了点A_1、B_1、C_1和D_1（图492，*a*）。给出它们的正面投影A_2、B_2、C_2和D_2，我们就可以作出棱锥的正面投影。在图492，б上已完成了这个作图。

应该指出，对所有类型的"复合图"（轴测投影，透视投影，费多罗夫投影等）也可以作出类似的关于点基的定理①。

① 参看《现代画法几何问题》论文集，1947年版，第180页。

画法几何的发展

（简　　史）

根据几何规律作图（投影图）[①]的要求，是从各种建筑物、要塞工事及金字塔等建筑实践中提出来的，到了较晚的年代，这种要求则来自机器制造和技术的需要。远在纪元前，作投影图的初步尝试就已经出现。保存到现代的古代雄伟建筑的遗迹，说明了在建造这些建筑物时曾经采用过平面图和其它图样。罗马建筑师马克·维特鲁维（纪元前一世纪）的论文集《十论建筑学》是这方面最古老的著作之一。在这本著作里，采用了物体的水平投影和正面投影（在两个投影间没有投影连系），好象这种投影当时已经是人所周知的东西了[②]。维特鲁维在绘画中采用了中心投影，并在其著作中研究了有关透视图作法的一些早期问题，例如当时就已经提及"主点"和"视点"之类的问题。

在古典文化繁荣之后，接着就进入了中世纪的衰落时期。在这时期的绘画艺术中，没有用到古代所用的透视知识。然而，在修筑中世纪城堡时发生的有关修整石料的所有比较复杂的方法，都要求作建筑物的平面图和立面图。但这只是一些个别的做法，而没有经过严格的数学论证。绘图理论还未出现。

直至文艺复兴时代，随着建筑学和艺术的复兴，画法几何在其历史上才进入了新的发展阶段。由于各种建筑工程（特别是桥梁、道路等）的日益扩大，古代曾经采用过的某些投影图要素，也都恢复应用并且不断发展。这时在意大利、荷兰和德国，建筑学、雕刻术和绘画术都得到非常蓬勃的发展，因而在这些国家的艺术家和建筑师面前提出一项任务，有必要着手根据几何原理研究写生透视的理论。在这个时期中，曾引用过一系列的基本概念，例如投影中心、画面、距离、主点、地平线、远距点等。

意大利学者、艺术理论家列昂·巴奇施塔·阿尔培奇（1404—1472）对建筑问题极为注意，他对透视基本理论的研究，以及对古代遗产中优秀形式的研究，丰富了各匠师的工艺经验。在研究写生画的数学原理（透视）方面，阿尔培奇在本人的论文《论写生画》和《论建筑术》中采用了灭点，并提出了有很大实践意义的利用网格作透视的方法。

当装饰佛罗伦萨著名的教堂[③]的青铜大门时，意大利建筑师罗伦佐·基培尔奇（1378—1455）采用写生画的透视原则，造出浮雕式的塑像。在天才的意大利艺术家、学者和工程师列昂纳尔达·达·芬奇（1452—1519）的作品中有很多应用透视图的例子，特别是一种所谓"观察"透视。当列昂纳尔达全部掌握了线性透视知识之后，还补充了"减色"透视和"外形减明"透视。当时他的根据是，在我们的眼睛和被观察的物体之间不存在空虚的几何空间，而充满着具有密度和颜色的现实的空气。列昂纳尔达力求所画的画显得特别玲珑浮凸，他认为阴影具有重大的意义，因此他将阴影分为"原始的影"和"派生的影"、"复杂的影"和"简单的影"。

日耳曼文艺复兴时代的卓越代表，德国艺术家和雕刻家阿尔培列赫·丢列尔（1471—1528）在发展透视方面作出了很大的贡献。在他那本详细研究绘画理论的《指南》一书中载有大量平面曲线的作图法，以及根据物体的水平投影和正面投影作物体的透视图和阴影的独创方法。

虽然在文艺复兴时代，艺术家仅对透视理论的个别问题上进行几何解法的研究，但是他们毕竟弄清了透视的基本理论，并为透视的数学论证打下了基础，而透视的数学论证工作是由意大利学者格维多·乌巴尔奇（1545

---

① 参看绪论。

② 是指远在古埃及时代，营造各种建筑物时就应用了平面图和立面图。

③ 教堂是教会建筑物。

—1607)着手进行的，应公认他为理论透视学的奠基者。乌巴尔奇的著作《透视六书》差不多包括了有关透视的所有主要问题的解答。

1636年，法国建筑师和数学家笛沙格(1593—1662)在其著作《绘制物体透视图的一般方法》中首次应用坐标法作透视图，因而为画法几何的轴测法奠定了基础。

在"自由的"透视学发展过程中，英国数学家泰勒(1685—1731)和德国几何学家南别尔特(1728—1777)起了重大的作用。泰勒研究了基本的定位问题的解法，并根据透视图确定原物体各种特性的方法；南别尔特则运用透视法图解初等几何学的一些重要问题。特别是当他研究简化透视图作法的仪器时，他曾提及比例规的使用，南别尔特根据仿射对应的性质，作出投射中心在无穷远时的透视图。南别尔特十分重视解决透视的逆问题，即根据用中心投射法作出的图重现原来物体的问题。他的著作《Freie Perspektive》(自由透视学)(1759)包含有作为现代摄影测量学基础的一些原则。1775年出现了卡尔斯捷纳的著作《Lehrbegriff der gesammten Mathematik》(一般数学的科学概念)，在该著作中，作者用解析法阐明了将空间坐标轴直角投射到平面上的理论。但是，被认为是轴测法的创始人的是英国几何学家费伊里奇，他于1820年在他的著作《Isometrical Perspective》(等测透视)中叙述了等测投影的理论，并指出它在技术上的应用。

法国工程师法列捷耶(1682—1773)曾研究过将绘图法应用于解修整石料问题，他研究出在复杂的条件下作圆锥截线的方法以及利用一般的投射法在凹曲面和凸曲面上作曲线的方法。

在画法几何发展成一门科学的过程中，法国大革命时代的著名的法国几何学家和工程师加斯巴尔·蒙日(1746—1818)起了卓越的作用。蒙日将积累起来的在平面上绘制空间物体图象的理论和实践加以系统化和概括，他把随着资本主义生产的不断增长而提出的各式各样的实际问题归纳为为数不多的几个基本的纯几何问题，并利用位在两个互相垂直的平面上的正投影予以解决。同时，蒙日首次提出，由两个投影组成的平面图形，可以看作是将所研究的形体的两个投影绕这两个投影面的交线旋转而重合在一个平面上的结果，这两个平面的交线后来称为"投影轴"。

1798年出版的蒙日的著作《Géometrie Descriptive》(画法几何学)是第一本系统叙述在平面上绘制空间形体图象的一般方法的著作，从而将画法几何学提高到科学学科的水平。蒙日的纯几何方法不但跟解析法没有矛盾，而且是解析法的自然的、与工程实践要求紧密联系的补充。蒙日在其画法几何学的著作中首次提及如下问题：1）几何变换理论的应用(在论证空间形体转变为平面图象方面，以及在应用代数方法解题部分)；2）关于标高投影某些理论问题的研究；3）曲线和曲面的详细研究，尤其是与回折棱面和等坡面有关问题的研究。特别是在作曲面的交线时，蒙日既应用了辅助平面法，也应用了辅助球面法，而为了确定线的实长和平面图形的实形，蒙日广泛利用了旋转法，以及远在1643年笛沙格著作中就曾应用过的更换投影面法。

蒙日的《画法几何学》是在各方面都迫切要求探索绘画理论的情况下出现的，因此这门新科学立即在技术学校中占有巩固的地位而成为教学计划中的主要课程之一。这样便引起了画法几何教材的大量出版，而且在当时出版的教科书中、有许多已具有论述全面而又系统性强的特点，并且都有高度的科学水平。

上世纪中叶在奥地利维也纳学派的著作里，画法几何学又得到了进一步的提高。这个学派根据射影几何学对物体进行科学的论述，从而丰富了画法几何学。这个学派最著名的代表作之一是在1871年出版的德国几何学家维尔盖尔姆·菲特涅尔的《画法几何学与射影几何学在本质上的联系》。这是第一本达到现代水平的内容丰富的画法几何教程。该学派的另一个德国几何学家埃米尔·缪列尔的画法几何讲义，在画法几何作为一门科学学科来讲授的初期也起过巨大的进步作用。

在论证轴测投影方面，柏林造型艺术学院和建筑学院教授卡尔·波尔克(1810—1876)起了卓越的作用，1853年他发表了轴测投影的基本定理。德国几何学家什瓦尔茨在1864年对这个定理进行了首次的推论和初步的证明。从那时候起，经过他推论的那个基本定理就称为波尔克-什瓦尔茨定理。1917年莫斯科大学教授A.K.符拉索夫给这个定理以简单的证明。莫斯科的几何学家H.A.格拉哥列夫教授指出波尔克定理只是关于两个四面体处于平行透视位置这一个更一般的定理的极限情形。与波尔克-什瓦尔茨定理类似的、有关中心轴测投影

的一些定理，在1910年为奥地利几何学家埃尔温·克鲁伯所证明。苏联的一些几何学家对克鲁伯定理作出了最简单的证明，并对它加上确定的论断。苏联几何学家还继续研究过在投射两个坐标体系时的轴测投影的基本命题①。

上世纪中叶，画法几何学产生了一个新的分支——多维空间画法几何学。在西方，"多维"画法几何学主要是由意大利数学家维罗涅捷和荷兰几何学家施卡乌捷发展起来的②。在俄国，多维画法几何学得到发展主要是与在物理-化学分析中所研究多组分体系(由多种元素组成的合金和溶液等等)时发生的问题有关。这方面，院士H. C. 库尔纳科夫学派的著作起着主导作用③。伟大的俄国结晶学家和几何学家E. C. 费奥多罗夫(1853—1919)非常清楚地解释了多维画法几何学作图的基本原理。他采用了各种几何形象代替点而作为基本元素，并指出了作平面几何体系的无穷集合的可能性(平行线段体系、矢量体系、圆体系等等)，这些体系是任意维数的点空间的一一映射④。

应用于建筑力学和机器制造的画法几何的滑动矢量法产生于二十世纪。这个方法最初是在玛约尔和米捷斯的著作中提出的。在苏联、戈尔Б. Н. 布诺夫等曾研究过这个方法的原理。

在苏联，画法几何学的发展是沿着特有的道路走过来的，发展的过程可以分为三个主要时期。

第一个时期(十九世纪以前) 在古代的俄国，当建造各种建筑物时，绘画写生画以及绘制农业用地和城市的平面图都采用了具有某些射影几何特性的图。如普斯可夫城全图(1581)是按照某些透视规律作出的。《莫斯科克里姆林宫图》(1600)是一种接近于正面轴测投影的"自由投影"。P. 沙尼可夫完成的《莫洛托夫工厂》的图样(1741)是正确绘制的复合图的例子。自学的发明家И. П. 库里宾的图，例如著名的横跨涅瓦河上的拱桥图(1773)以及十八世纪时伟大的俄国建筑师Д. В. 乌赫托姆斯基，В. И. 巴热诺夫，М. Ф. 卡扎科夫等的图都是几何上正确的投影图。

第二个时期(从十九世纪初叶到伟大十月社会主义革命前) 在十九世纪初叶，人们逐步掌握了所有积累起来的有关作图方法的资料，已不再象过去那样只是自发地应用一下射影原则了。当时各技术学校都设有画法几何课，并列为主要课程之一。

画法几何这一门课程是在1810年于彼得堡道路交通军事工程学院(现在的列宁格勒铁路运输学院)首次讲授的。第一个被任命为画法几何教授的是法国工程师波兹耶，他原先服务于法国的工兵部队。波兹耶毕业于梅兹耶尔工程学校，在校时他听完了蒙日讲授的画法几何教程。当波兹耶开始讲课时，于1816年在彼得堡出版了一本画法几何教程，这本书由他的助手Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫(1796—1849)译成俄文。波兹耶的这本著作是在俄国印行的第一本画法几何学。从1818年起，Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫就在学院开始领导画法几何的教学，并于1824年获得第一位俄国画法几何教授的称号。1821年他写的《画法几何基础》问世了，这是第一本原稿用俄文写成的画法几何教程。Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫的教科书详述了画法几何的理论，其水平可与当时欧洲最优秀的教程并驾齐驱。在以后的著作中，Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫首次用俄文写出了关于在正投影和透视中作阴影的理论的科学论证，同时解决了使曲线在不同的表面上投下相同的阴影的作图问题。Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫探讨了"空中"透视几何之后，特别将它应用于造型艺术中。Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫在其著作中对地图制图学及日晷学中应用投影的研究以很大的注意。Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫扩大了蒙日所用的投影概念，并特别介绍了辅助投影法，这种方法后来在苏维埃时代曾详尽地加以研究(例如，参看C. M. 科洛托夫画法几何学，国家机器制造书籍出版社，1933)。Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫的巨大功绩还在于当他努力设法用俄语讲授画法几何学时⑤，引入了画法几

---

① Н. Ф. 切特维鲁新："三重直线是空间直角坐标系的投影"，《数学汇编》第40卷，第4期，1933年。

② P. H. 斯考脱《多维几何》，舒伯特丛书，35卷，莱比锡，1902年版。

③ 在Н. С. 库尔纳可夫《物理-化学分析概论》一书中的В. П. 拉季谢夫《在物理-化学分析中应用的绘画方法》。苏联科学院出版，第四版，1940年。

④ E. C. 费多罗夫《作为制图原理的新几何学》，彼得堡矿业学院出版，1907年。E. C. 费多罗夫《新画法几何学》，俄罗斯科学院通报，第六集，第二卷，彼得格勒，1917年版。

⑤ 当时在道路交通军事工程学院是用法语讲课的。

何学的俄文术语，这些术语只要稍加改变，就跟现在所用的术语一样。由于Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫的坚持，在所有中等军事学校中也讲授了画法几何的初步知识。

彼得堡道路交通军事工程学院的Я. А. 谢瓦斯季亚诺夫继承者、彼得堡工学院教授、十九世纪时卓越的俄国高等学校教育家 Н. И. 马卡罗夫(1824—1904)用俄文出版了一系列有关画法几何学著作的评论，在很大程度上促进了画法几何学在俄国的开发。Н. И. 马卡罗夫还积极参加给当时各学校拟订画法几何学、绘画和制图教学大纲的工作。内容最完备的画法几何教程也是由 Н. И. 马卡罗夫写成的(1870)。

Н. И. 马卡罗夫在线性透视的著作中，采用了圆锥投影法解决平面上的线性透视问题，无需使用所绘物体的正投影，同时他还研究了透视的逆问题的解法。

彼得堡道路交通军事工程学院建筑艺术教研室 В. И. 库尔久莫夫教授 (1853—1904) 的《画法几何教程》(1893—1897) 是俄国的画法几何经典著作。除了这本教程外，В. И. 库尔久莫夫还写了一整套有关画法几何各种问题的教学参考书。

二十世纪前半期的俄国学者 Н. А. 雷宁(1887—1943)教授创作了丰富的画法几何教材，他在普及和推广画法几何方法方面，以及将这门学科应用于解决力学、航空摄影、电影摄影等实际问题方面都起了重要的作用。

第三个时期(苏维埃时代) 在伟大十月社会主义革命之后，画法几何这一门科学得到了全面发展所必需的一切条件。丰富的科学文献陆续问世。在高等技术学校里都成立了专门的画法几何与工程制图教研室。为了培养这方面的科学工作者，有关的教研室都成立研究班。因此便产生了以继续发展画法几何这门科学为宗旨的科学研究协会，特别是 1944 年成立于莫斯科的画法几何科学讨论会，以及列宁格勒、基辅等地的画法几何与绘画方面的教师和科学工作者协会。

苏联几何学家在画法几何领域内曾探讨过一些新的科学研究方法：

1) 中心轴测投影的基本理论；

2) 用参数法研究图象，图象的定位完整性和度量完整性的理论；

3) 在画法几何中拓朴变换和其它变换的应用；

4) 多维画法几何；

5) 画法几何中的列线图解法和绘图机械化。

苏联在画法几何领域的科学著作及其教学的水平正在继续不断地提高。

参考文献

Альтшулер И. С. Краткий курс начертательной геометрии. Минск. Издательство МВССПО БССР, 1962.

Арустамов Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии. Машгиз, 1949.

Вольберг О. А. Лекции по начертательной геометрии. М. — Л., Учпедгиз, 1947.

«Вопросы современной начертательной геометрии», Сборник статей под редакцией Н. Ф. Четверухина. М. — Л., Гостехиздат, 1947.

«Вопросы теории, приложений и методики преподавания начертательной геометрии». Труды Рижской научно-методической конференции. Рига, 1960.

Глаголев Н. А. Начертательная геометрия. М. — Л., Гостехиздат, 1946.

Глазунов Е. А. и Четверухин Н. Ф. Аксонометрия. М., Гостехиздат, 1953.

Гордон В. О. и Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. М., Физматгиз, 1962.

Добряков А. И. Курс начертательной геометрии (с приложением альбома чертежей). М., Государственное архитектурное издательство, 1949.

Зеленин Е. В. Начертательная геометрия и черчение. М., Гостехиздат, 1953.

Курдюмов В. И. Курс начертательной геометрии. С-Петербург, 1893—97.

Макаров Н. И. Курс начертательной геометрии. С-Петербург, 1870.

«Методы начертательной геометрии и ее приложения». Сборник статей под редакцией Н. Ф. Четверухина, М., Гостехиздат, 1955.

Монж Г. Начертательная геометрия. Перевод под редакцией Д. И. Каргина, Изд. АН СССР, 1947.

Попов Н. А. Курс начертательной геометрии. М., Гостехиздат, 1947.

Посвянский А. Д. Краткий Курс начертательной геометрии. М., Изд-во «Высшая школа», 1961.

Посвянский А. Д. и Рыжов Н. Н. Сборник задач по начертательной геометрии. М., Гостехиздат, 1956.

Рудаев А. К. Сборник задач по начертательной геометрии. М., Гостехиздат, 1948.

Рынин Н. А. Начертательная геометрия. Л., Госстройиздат, 1939.

Севастьянов Я. А. Основания начертательной геометрии. С-Петербург, 1821.

«Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике», М., Изд-во «Советская наука», 1958.

«Успехи математических наук», вып. 7. М., Гостехиздат, 1940.

Чалый А. Т. Курс начертательной геометрии. Москва — Киев, Машгиз, 1962.

Четверухин Н. Ф. Начертательная геометрия. Обзорная статья в книге «Математика в СССР за сорок лет», т. I. М., Физматгиз, 1959, стр. 893.

Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Прянишникова З. И., Тевлин А. М., Федотов Г. И. Курс начертательной геометрии. М., Гостехиздат, 1956.

Kadeřávek F., Klima J., Kounovský J., Deskiptivni geometrie. Praha, 1950—54.

Müller E., Vorlesungen über darstellenden Geometrie, Leipzig und Wien (1923—1929).

Müller E. und Kruppa E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Wien (1948).
Scheffers G., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Berlin (Springer) 1919—1922.
Stiefel E. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Basel. 1947.
Wiener Ch. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig, 1884—87.